MATEMATISK REPRESENTATION AV EMPIRISKA STORHETER I ETT HISTORISKT PERSPEKTIV

Jan Odelstad

1. Inledning

Inom vissa delar av naturvetenskapen är beskrivningen av naturen matematisk till sin karaktär. En förutsättning för denna naturbeskrivning är den matematiska representationen av empiriska storheter. Det är nämligen denna som ska göra tillämpningen av matematik möjlig genom att leda över till den matematiska modellen.

Det moderna teorin för den matematiska representationen av empiriska storheter som grundlades för c:a 100 år sedan har sin utgångspunkt i två uppsatser författade av tyska vetenskapsmän, nämligen Hermann von Helmholtz: "Zählen und Messen, erkenntnisstheoretisch betrachtet" från 1887 och Otto Hölder: "Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass" från 1901. von Helmholtz (1821-1894) var en av 1800-talets mest kända naturforskare, medan Hölder (1859-1937) var en framstående matematiker.[1] Med Helmholtz och Hölders arbeten som utgångspunkt har ett forskningsområde växt fram som brukar kallas för *mätningsteori*. Termen mätningsteori är inte särskilt lyckad, eftersom den kan ge sken av att det är fråga om en teori om konkret mätande medan det egentligen mer är en teori för matematisk representation av empiriska storheter, en *representationslära*.[2] Mätande och representation är nära sammanhängande, eftersom mätning ofta är det konkreta sättet att etablera representationen på. Det som studeras i mätningsteorin är alltså den abstrakta, principiella sidan av mätande.

[1]Hölder har fått ge namn åt några matematiska begrepp, nämligen Hölder-kontinuerlig, Hölders olikhet och – i algebran – Hölders teorem. Till Hölders teorem ska jag återkomma.

[2]Hölder använder termen "allmän storhetslära".

Det är inte alltid lätt att skilja på verkligheten och vår beskrivning av den. Ibland dyker det i vetenskapen upp frågor som vid första påseende kan förefalla handla om naturen, men som vid närmare eftertanke tycks handla om vår beskrivning av den. Som komplement till en fysikalisk förklaring kan frågeställningen då kräva något slags historisk förklaring, t.ex. en begreppshistorisk. Samspelet mellan fysikaliska och historiska förklaringar tror jag är mer komplicerat än vad vi vanligtvis tänker oss. Det är detta som jag vill se närmare på gällande två speciella frågeställningar, nämligen naturlagarnas form och de dimensionslösa konstanternas värden. Som vi ska se kunde en annan ram för naturbeskrivningen ha valts, och då skulle naturlagarna ha haft en annan form och de dimensionslösa konstanterna andra värden. De val som gjorts är i liten utsträckning medvetna och det kan vara lätt att glömma bort detta inslag av konvention i naturbeskrivningen. Det som intresserar mig är alltså vissa aspekter på frågan vad som är invariant i förhållande till vårt sätt att beskriva naturen.

2. Dimensionella konstanter och dimensionsinvarians

Låt oss se på ett välkänt exempel på en naturlag, nämligen gravitationslagen. Den kan formuleras på följande sätt:

$$F_g = G \cdot m_1 \cdot m_2 / r^2$$

där F_g är gravitationskraften på var och en av kropparna, m_1 och m_2 är kropparnas massor, r är avståndet mellan kropparna och G är gravitationskonstanten, som är en s.k. universell konstant. G:s numeriska värde beror på de enheter som kraft, massa och längd är uttryckta i. G är således exempel på en *dimensionell konstant*. Använder vi oss av SI-enheter så är G:s värde $6{,}673 \times 10^{-11}$, dvs. G:s värde är $6{,}673 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$.

Gravitationslagen är formulerad i matematikens språk. Lägg märke till förekomsten av multiplikation, division och kvadrering, som alla tre är matematiska operationer. Men det är ett samband mellan empiriska storheter som beskrivs med hjälp av lagen. Empiriska storheter som massor och avstånd representeras matematiskt som tal (alternativt som reellvärda variabler). En empirisk storhet av lite annat slag förekommer också, nämligen gravitationskonstanten och även den representeras matematiskt som ett tal.

Fysikaliska lagar har en intressant egenskap, de är dimensionsinvarianta i den meningen att om man ändrar på enheterna för de ingående storheterna så ändras inte lagarnas form, däremot kan värdet på konstanterna ändras. Ett kvantitativt samband mellan fysikaliska storheter är dimensionsinvariant om byte av enheter alltid kan kompenseras genom multiplikation av en konstant vars värde bestäms av enheterna. Att fysikaliska lagar är dimensionsinvarianta utgör grunden för dimensionsanalysen som spelar en stor roll i vissa typer av tillämpningar.

För gravitationslagen gäller t.ex. att vilka enheter som kraften, massorna och avståndet är uttryckta i endast spelar roll för värdet på G. Formen på lagen ändras inte vid byte av enhet utan den är multiplikation av massorna och division av avståndet i kvadrat helt oberoende vilka enheter vi uttrycker storheterna i.

3. Dimensionslösa konstanter

Betrakta följande uttryck:

$$\alpha = e^2/2hc\varepsilon_0$$

där e är elektronens laddning, c är ljusets hastigheten i vakuum, h är Plancks konstant och ε_0 är [di]ektricitetskonstanten. α kallas *finstrukturkonstanten*. Den spelar roll vid spektralanalys och är ett mått på styrkan i den elektromagnetiska interaktionen. Notera att α är bildad av de fyra grundläggande fysikaliska konstanterna e,c,h och ε_0. Sätter man in deras värden med enheter och gör en dimensionsanalys, så finner man att enheterna tar ut varandra, dvs. α är dimensionslös. Mer i detalj erhåller man

$$\frac{[1{,}602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}]^2}{[2\cdot 6{,}626.10^{-34}\cdot\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}]\cdot[2{,}998.10^{-8}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}]\cdot[8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot\mathrm{C}^2\cdot\mathrm{N}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-2}]}$$

Om man betänker att Joule som mått på energi inom SI är en härledd enhet definierad som N·m, så finner man att enheterna tar ut varandra och det numeriska värdet blir ungefär 1/137 (experimentellt värde 1/137,03). a är således en dimensionslös konstant och dess värde är ungefär 1/137. $1/\alpha$ är alltså i det närmaste 137. Varför just 137? Den frågan har intresserat många, bl.a. Arthur Eddington.

Arthur Eddington (1882—1944) blev Professor of Astronomy and Experimental Philosophy i Cambridge 1913 och var sin tids främste astrofysiker. Mest känd bland filosofer är han kanske för att han ledde en av de solförmörkelseexpeditioner 1919 vid vilka den allmänna relativitetsteorins förutsägelser om att ljuset har tyngd testades för första gången.

George Gamow har berättat följande:

> Eddington spent the last part of his life without much success in an attempt to derive the number 137, but we still believe that somebody, someday, will do it. (Gamow, 1970, sid. 204)

För, som Gamow påpekat:

> It is a deep belief of theoretical physicists that pure numbers which appear in formulae derived by dimensional analysis must be obtained in a purely mathematical way from some not yet existing theory. Otherwise what fun would there be in theoretical physics?! (Gamow, 1970, sid. 204)

Som redan framhållits, tror jag att när det gäller såväl dimensionsinvariansen som de dimensionslösa konstanternas värden ligger en förväxling mellan egenskaper hos naturen och hos vår beskrivning av naturen nära till hands. Jag ska återkomma till detta. Men låt oss först se närmare på den matematiska representationen av empiriska storheter.

4. Storhetsrepresentation och formulering av lagbundenheter

Hur vi representerar empiriska storheter matematiskt sammanhänger nära med hur vi skriver kvantitativa samband såsom naturlagar o.dyl. En av syftena med representationen av empiriska storheter är att ge en ram för att kunna formulera dylika samband. Det moderna sättet att skriva lagar och samband, som vi just sett ett exempel på i gravitationslagen, förutsätter ett visst sätt att matematiskt representera empiriska storheter, ett sätt som är resultatet av en lång utvecklingsprocess.

I antiken var det naturligtvis inte aktuellt att formulera gravitationslagen, eftersom man inte kände till den. Däremot formulerade man andra samband men gjorde det på ett helt annat sätt än vi gör idag. Skälet till detta är att man inte utnyttjade symboler och att det talbegrepp man använde var helt annorlunda än begreppet reellt tal som vi använder idag.

Utvecklingen mot det moderna sättet att representera empiriska storheter matematiskt och att skriva lagar och samband gick i flera steg där t.ex. Descartes och Newton spelar viktiga roller. Men det var inte färdigutvecklat ens med Newton, som inte själv uttryckte gravitationslagen på det moderna sättet.

Jag ska först skissera det antika sättet att representera empiriska storheter matematiskt, och sedan se på några steg i utvecklingen mot det moderna sättet. Därefter ska jag anknyta till Hölder och kortfattat beskriva den moderna synen på den matematiska representationen av empiriska storheter. Slutligen skall jag återvända till de två frågeställningar gällande den klassiska fysikaliska teoribildning som främst intresserar mig här, nämligen varför fysikens lagar är dimensionsinvarianta och i vilken mening de dimensionslösa konstanterna verkligen är konstanter.

5. Eudoxos' proportionslära

Grekerna skapade aldrig det reella talsystemet. Med tal menade de positiva hela tal, medan rationella tal, dvs. bråk, uppfattades man som *förhållanden* mellan hela tal. För de irrationella talen saknade man begrepp och istället använde man sig av läran om förhållandet mellan storheter. Storhetsbegreppet spelade därför en helt annan roll än det gör i vår tids matematik.

Enligt den grekiska matematiken finns det storheter av olika slag. Storheter av samma slag kan jämföras med avseende på storlek, dvs. för två storheter av samma slag gäller att de antingen är lika stora eller den ena större än den andra. Vidare gäller att en storhet alltid kan ökas med en storhet av samma slag, vilket innebär att två eller flera storheter av samma slag kan tas tillhopa, "adderas", och bilda en ny storhet. Det är också möjligt att ta bort en mindre storhet från en större. Något av vad som tänks gälla vid dylika operationer med storheter framgår av axiomen i bok I av Euklides' *Elementa*. De tre första lyder:

1. De som är lika stora med ett och samma, äro sins emellan lika stora.
2. Om man lägger lika stora till lika stora, så blifva de hela lika stora.
3. Om man tager lika stora ifrån lika stora; så äro de återstående lika stora.[3]

[3] Här liksom i fortsättningen vid citat ur *Elementa* har jag följt sjätte upplagan från 1828

För den grekiska matematiken var det, som framgår av axiom 2, viktigt att storheter kan tas tillsammans och bilda en ny storhet. Därigenom kommer för grekerna storhetsbegreppet att få en snävare innebörd än det har idag och motsvarar närmast vad vi skulle kalla *extensiv storhet,* dvs. storheter som kan adderas.

Grekernas grundläggande idé om relationen mellan storheter och tal var att bilda förhållanden mellan storheter av samma slag och sedan jämföra förhållandena med avseende på storlek. Läran om förhållandet mellan storheter och tal fick i antiken sin slutgiltiga formulering i den av Eudoxos på 300-talet f. kr. skapade proportionsläran.

Den klassiska framställningen av denna ger Euklides (omkr. 300 f.Kr.) i Bok V av *Elementa.* Jag ska här återge de första sju definitionerna ur denna bok.

> 1. En mindre storhet kallas part utaf en större storhet, om den mindre mäter den större; det är, innehåller jämt uti henne, så att ingen del blifver öfver.
>
> 2. Men en större storhet kallas mångfaldig utaf den mindre, om den mindre mäter den större.
>
> 3. Proportion kallas det förhållande, som är emellan tvänne storheter af samma slag i anseende till deras quantitet.
>
> 4. De storheter sägas hafva proportion sins emellan, eller vara av samma slag, om hvilka man kan begripa, att den ena kan tagas så många gångor, att hon blifver större än den andra.
>
> 5. Storheter sägas vara i samma proportion, den första till den andra, och den tredje till den fjerde, om den förstas och tredjes lika mångfaldige, jemförde med den andras och fjerdes lika mångfaldige, ehuru mångfaldige de må vara, äro båda tillika större, lika store eller mindre, än de lika mångfaldige af den andra och fjerde, om de jemföras, som svara emot hvarandra.
>
> 6. De storheter, som äro i samma proportion, sägas vara proportionela.
>
> 7. När den förstas mångfaldiga är större än den andras; men den tredjes icke större än den fjerdes; så säges den första hafva till den andra en större proportion, än den tredje till den fjerde.

Förhållandet mellan två storheter a och b av samma slag har i modern tid

---

av Mårten Strömers svenska översättning, ursprungligen från 1740-talet. Strömers översättning var den första översättningen av delar av Euklides' *Elementa* till svenska.

ofta betecknats a:b och den n-te multipeln av a, dvs. n stycken a tagna tillsammans, skrivs ofta na. Definition 5 kan då skrivas på följande för en nutida läsare mer lättöverskådliga sätt:
a:b = c:d omm för alla positiva hela tal m och n:

$$ma > nb \ \& \ mc > nd \text{ eller}$$
$$ma = nb \ \& \ mc = nd \text{ eller}$$
$$ma < nb \ \& \ mc < nd$$

För att se hur man med hjälp av proportionsläran kan formulera lagbundenheter och kvantitativa samband behöver vi två definitioner till.

> 10. Om tre storheter äro proportionela, så säges den första hafva till den tredje en duplicerad proportion af den, som hon har till den andra.
>
> 11. Men om fyra storheter äro proportionela, så säges den första hafva till den fjerde en triplicerad proportion af den, som hon har till den andra. Och så vidare i ordning, en mer, så långt proportionerne räcka.

Definition 10 innebär att om a:b = b:c så är a:c den duplicerade proportionen av a:b. Och analogt innebär definition 11 att om a:b = b:c = c:d så är a:d den triplicerade proportionen av a:b. Innebörden i duplicerad och triplicerad proportion framgår klarare om man noterar att om a,b,c och d är positiva hela tal så gäller att $a^2:b^2$ är den duplicerade proportionen av a:b och $a^3:b^3$ är den triplicerade proportionen av a:b. (För ett bevis se Odelstad, 1982, sid. 258.)

Låt mig ge två exempel på hur man i termer av proportionsläran formulerade kvantitativa samband, det ena av matematiskt och det andra av naturvetenskapligt slag.

Satsen om sfärens volym enligt Euklides (Bok XII sats 18): "Spherer äro till hvarandra uti ett tripliceradt förhållande af deras diametrar."

Galilei i *Dialoger rörande två nya vetenskaper* från 1638: "If a movable descends from rest in uniformly accelerated motion, the spaces run through in any time whatever are to each other as the duplicate ratio of their times." (Galilei, 1974, sid. 166.)

Det bör observeras att vid formuleringen av kvantitativa samband inom ramen för proportionsläran förekommer inga konstanter, t.ex. lyser π med sin frånvaro i satsen om sfärens volym.

Eudoxos' proportionslära utgjorde länge ramen för den matematiska representationen av empiriska storheter och därmed för tillämpning av matematik Vilken roll kan det ha spelat för grundläggande inslag i den fysikaliska teoribildningen som begreppet fysikalisk lag och fysikalisk konstant att fysiken utvecklades inom ramen för proportionsläran? Innan vi diskuterar den frågan är det lämpligt att se på hur den moderna matematiska representationen av empiriska storheter utvecklades ur proportionsläran.

6. Proportionslärans aritmetisering

Proportionsläran tillhandahåller alltså en metod som gör det möjligt att jämföra förhållanden mellan extensiva storheter utan att vare sig storheterna eller förhållandet mellan dem är tal. Det sätt man inom proportionslärans ram använde för att formulera kvantitativa samband är därför inte aritmetiskt. Utvecklingen mot vårt moderna sätt att formulera kvantitativa samband innebär därför bl.a. en aritmetisering av proportionsläran, och jag ska här ge en kortfattad beskrivning av denna. (För en utförligare framställning se Odelstad, 1982, sid. 260 ff.)

Ett viktigt steg i aritmetiseringen av proportionsläran tas av Descartes i *La Geometrie* från 1637 då han säger bl.a. följande:

> ...välja en linje, som jag här skall kalla ett [unité] för att sätta den i största möjliga samband med talen, och som vanligen kan väljas godtyckligt,... (Descartes, 1959, sid. 189)

Enligt Descartes bör man, då man betraktar storheter av samma slag, välja en av storheterna e som enhet och identifiera den med talet 1. En annan storhet (av samma slag) a identifieras med det tal r sådant att a och e samt r och 1 är proportionella. Descartes identifierar på detta sätt storheter med tal, och kan därmed utföra samma operationer med storheterna som med talen.

Ett annat sätt att åstadkomma aritmetisering av proportionsläran anvisas av Newton i *Arithmetica Universalis* från 1684:

> By Number we understand not so much a Multitude of Unities, as the abstracted Ratio of any Quantity, to another Quantity of the same kind, which we take for Unity. And this is threefold; integer, fracted and surd: An Integer is what is measured by Unity, a Fraction, that which a submultiple Part of Unity measures, and a Surd, to which Unity is incommensurable. (Newton, 1967, sid 7).

Observera att för Newton är tal det abstrakta förhållandet mellan två storheter. Att a förhåller sig till b som det duplicerade förhållandet av c till d kan därför enligt Newton uttryckas så, att förhållandet mellan a och b är lika med kvadraten på förhållandet mellan c och d.

Aritmetisering av proportionsläran kan alltså erhållas dels genom att förhållandet mellan storheter identiferas med tal (Newton) och dels genom att storheter identifieras med tal (Descartes). I vår tid gör vi båda delarna.

För Newton är talen logiskt sett intimt förknippade med mätning av extensiva storheter och därmed med tillämpning av matematik. Mot denna tanke vänder sig Dedekind i *Stetigkeit und irrationale Zahlen* från 1872:

> For, the way in which the irrational numbers are usually introduced is based directly upon the conception of extensive magnitudes—which itself is nowhere carefully defined—and explains number as the result of measuring such a magnitude by another of the same kind. Instead of this I demand that arithmetic shall be developed out of itself. (Dedekind, 1963)

Dedekinds och andra matematikers insatser ledde till att aritmetiken kom att ses helt oberoende av mätning. (För en diskussion av förhållandet mellan mätningsteori och matematik, se Odelstad, 1981.) Därvid uppstår problemet hur vi ur en principiell synvinkel ska kunna tillämpa matematik i empirisk vetenskap, dvs. hur ska vi kunna representera empiriska storheter matematiskt. Detta problem behandlar Hölder i "Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass" från 1901. Hölder formulerar axiom som storheter av samma slag ska uppfylla (t.ex. längd-storheter och mass-storheter) i termer av en relation $>_H$ "åtminstone lika stor som" och en operation $\circ$, som innebär att öka en storhet med en annan (dvs. att ta två storheter tillsammans). Hölder visar att om axiomen är uppfyllda hör till varje förhållande mellan storheter ett positivt reellt tal. Om en storhet väljs som enhet finns dessutom en tillordning av tal till storheterna med intressanta egenskaper, och det är den formen av Hölders resultat som brukar uppmärksammas i mätningsteorin.

En modern variant av Hölders axiom är följande (se Krantz et al., 1971, sid. 73).[4] Den ordnade tipeln $\langle A, \geq_H, \circ\rangle$ är ett extensivt system om A är en mängd, $\geq_H$ en binär relation på A och $\circ$ en binär operation på A och följande fem axiom är uppfyllda för alla element a,b,c,d i A (där $x =_H y$ innebär $x \geq_H y$ och $y \geq_H x$, medan $x >_H y$ innebär $x \geq_H y$ och inte $y \geq_H x$).

[4]Med Hölders teorem avses i algebran ofta följande: Varje ordnad Arkimedisk grupp är en delgrupp till den additiva gruppen av alla reella tal och är således kommutativ.

A1. $\geq_H$ är en svag ordning, dvs. $\geq_H$ är reflexiv, transitiv och sammanhängande.

A2. $ao(boc) =_H (aob)oc$.

A3: $a \geq_H b$ omm $aoc \geq_H boc$ omm $coa \geq_H cob$.

A4. $aob >_H a$.

A5. Om $a >_H b$, så gäller att för varje c och d i A existerar ett positivt heltal n sådant att

$$na \circ c \geq_H nb \circ d$$

där na är definieras induktivt på följande sätt: 1a=a, (n+1)a=na o a.

Observera likheten i karaktär hos Euklides' axiom och Hölders. Euklides' axiom 1 kan skrivas: $a =_H c$ och $b =_H c$ implicerar $a =_H b$. Och axiom 2 hos Euklides kan skrivas på följande sätt: $a =_H b$ och $c =_H d$ implicerar $aoc =_H bod$.[5]

Hölder visade nu följande: Om $\langle A, \geq_H, o\rangle$ är ett extensivt system så finns det en funktion h med de positiva reella talen som värdeområde sådan att för alla a och b i A

(i) $a \geq_H b$ omm $h(a) \geq h(b)$
(ii) $h(aob) = h(a) + h(b)$.

Om h och h' uppfyller (i) och (ii) så finns ett positivt reellt tal k sådant att för alla a i A,

$$h'(a) = k \cdot h(a).$$

Observera att h är en isomorfi frånsett att h inte säkert är 1-1. Man brukar i mätningsteorin säga att h är en homomorfi från $\langle A, \geq_H, o\rangle$ till $\langle Re^+, \geq, + \rangle$. Ur ett mätningsteoretiskt perspektiv är således mått homomorfier.

Det bör observeras att om $\langle A, \geq_H, o\rangle$kan homomorft representeras med $\langle Re^+, \geq, + \rangle$ så gäller att $\langle A, \geq_H, o\rangle$ också kan homomorft representeras med $\langle Re^+, \geq, \oplus\rangle$,[6] där $\oplus$ definieras av

---

[5] Jfr. vidare definition 4 i Bok V av Elementa med A5 ovan.

[6] Detta kan inses på följande sätt: Låt $\varphi(x) = \sqrt{x}$. Då gäller att φ är en isomorfi av $\langle Re^+, \geq, + \rangle$ på $\langle Re^+, \geq_H, \oplus\rangle$. Ty

$$r \geq s \text{ omm } \sqrt{r} \geq \sqrt{s} \text{ omm } \varphi(r) \geq \varphi(s).$$
$$\varphi(r + s) = \sqrt{(r + s)} = [(\sqrt{r})^2 + (\sqrt{s})^2)]^{1/2} = \sqrt{r} \oplus \sqrt{s} = \varphi(r) / \varphi(s).$$

Således gäller att

$$a \geq_H b \text{ omm } h(a) \geq h(b) \text{ omm } \varphi(h(a)) \geq \varphi(h(b)).$$
$$\varphi(h(a \circ b)) = \varphi(h(a) + h(b)) = \varphi(h(a)) \oplus \varphi(h(b)).$$

$$r \oplus s = \sqrt{(r^2 + s^2)}.$$

$\langle Re^+, \geq, \oplus \rangle$ är en alternativ, icke-traditionell representation av den extensiva strukturen $\langle A, \geq_H, o \rangle$. Det finns oändligt många dylika alternativa numeriska representationer av extensiva system. (Se Krantz et. al., 1971, kap. 3 för en diskussion av detta problemområde.) Jag ska återkomma till alternativa numeriska representationer av extensiva strukturer.

Hölders tanke kan alltså beskrivas så här: Många fysikaliska kvantiteter, t.ex. längd, massa och kraft, genererar extensiva strukturer över objekt. (För en beskrivning av kvantiteten längd i detta avseende, se Odelstad, 1990, sid. 6-7.) Låt Q_i vara en dylik fysikalisk kvantitet, vilket innebär att man kan "addera" Q_i-storheter. Betrakta Q_i för objekten i mängden X. Då erhålls en extensiv struktur $\langle X, \geq_i, o_i \rangle$ och det finns en homomorfi h_i från $\langle X, \geq_i, o_i \rangle$ till $\langle Re^+, \geq, + \rangle$, dvs. h_i uppfyller (i) och (ii) ovan. Ett mått för Q_i över mängden X m.a.p. den numeriska strukturen $\langle Re^+, \geq, + \rangle$ är en homomorfi från $\langle X, \geq_i, o_i \rangle$ till $\langle Re^+, \geq, + \rangle$. Det innebär att om h_i och h_i' är mått för Q_i över någon mängd X, så gäller att det finns ett positivt reellt tal p_i sådant att $h_i'(x)=p_ih_i(x)$ för alla $x \in X$. Extensiva fysikaliska storheter har således mått på kvotskala.

Hölders syn på mätningens abstrakta (teoretiska) sida kan sägas vara strukturellt och representationellt: de kvantiteter (attribut) som mäts ses som strukturer och dessa representeras (homomorft) av måtten med en numerisk struktur. De förhållanden mellan storheter som proportionsläran handlar om svarar inom ramen för detta synsätt mot kvoter mellan mätvärden. Förhållandet mellan a:s Q_i och b:s Q_i är $h_i(a)/h_i(b)$, där h_i är ett godt. mått för Q_i m.a.p. $\langle Re^+, \geq, + \rangle$. Det innebär att såväl storheter som förhållanden mellan storheter identifieras med tal, och Hölder fullföljer därför både Descartes' och Newtons tankegångar gällande proportionslärans aritmetisering. Notera att satsen om sfärens volym kan skrivas på följande sätt: Om V(s) är volymen hos sfären s i någon enhet och d(s) är längden på diametern hos s i någon enhet, så gäller att $V(s_1)/V(s_2) = [d(s_1)/d(s_2)]^3$.

7. *Proportionsläran och dimensionsinvarians*

Vi ska nu återgå till frågan varför fysikaliska lagar är dimensionsinvarianta. För den skull behöver vi först se lite närmare på fysikaliska lagars uppbyggnad i ljuset av Hölders resultat. Låt oss åter välja gravitationslagen som exempel. (För en utförligare diskussion se Odelstad, 1990, sid. 271f). Låt X vara klassen av system som består av två materiella objekt på ett visst avstånd från varandra. Om $x \in X$ låt $m_1(x)$ vara massan i kilogram hos det materiella objekt i x som har minst massa, $m_2(x)$ vara massan i kilogram hos det materiella objekt i x som har störst massa, r(x) vara avståndet i meter mellan de båda objekten och $F_g(x)$ vara den gravitationella kraften i Newton på var och en av objekten. Då gäller att

$$\forall x \in X: \; F_g(x) = G \cdot m_1(x) \cdot m_2(x) / r(x)^2$$

där G är $6{,}673 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.

Observera att m_1, m_2, r och F_g är mått. Generellt är alltså en fysikalisk lag på formen

$$\forall x \in X: \; h_0(x) = f\big(h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x)\big)$$

där h_i är mått för en fysikalisk kvantitet Q_i.

För att förenkla framställningen kommer jag i fortsättningen huvudsakligen att låta k vara 2, dvs. anta att h_0 är en funktion av h_1 och h_2. Dvs.

$$\forall x \in X: \; h_0(x) = f\big(h_1(x), h_2(x)\big).$$

Vi kan nu precisera vad det innebär att ett samband är dimensionsinvariant. Låt h_i vara mått för den fysikaliska kvantiteten Q_i. Sambandet

$$\forall x \in X: \; h_0(x) = f\big(h_1(x), h_2(x)\big) \qquad (*)$$

är dimensionsinvariant omm för alla mått h_1' för Q_1 och h_2' för Q_2 finns det ett mått h_0' för Q_0 sådant att

$$\forall x \in X: \; h_0'(x) = f\big(h_1'(x), h_2'(x)\big).$$

Eftersom alla inblandade mått är på kvotskala gäller att (*) är dimensionsinvariant omm för alla $p_1, p_2 > 0$ det finns $p_0 > 0$ sådant att

$$\forall x \in X: \; p_0 h_0(x) = f\big(p_1 h_1(x), p_2 h_2(x)\big)$$

(observera att det är fråga om samma f i båda ekvationerna.)

Låt mig ge två exempel på enkla samband, ett dimensionsinvariant och ett som normalt inte är dimensionsinvariant.

Exempel 1:

$$\forall x \in X: \; h_0(x) = h_1(x) \cdot h_2(x)$$

är dimensionsinvariant. Det inses på följande sätt. Om p_1 och p_2 är givna så välj $p_0=p_1 \cdot p_2$ eftersom

$$\forall x \in X: \ (p_1 \cdot p_2)h_0(x) = p_1h_1(x) \cdot p_2h_2(x).$$

Exempel 2:

$$\forall x \in X: \ h_0(x) = h_1(x) + h_2(x)$$

är inte säkert dimensionsinvariant om Q_1 och Q_2 är fysikaliska kvantiteter av olika dimension (dvs. de mäts inte med samma enhet). Ty om $p_1,p_2>0$ så är det inte säkert att det finns $p_0>0$ sådant att

$$\forall x \in X: \ p_0h_0(x) = p_1h_1(x) + p_2h_2(x).$$

Alla viktiga kvantitativa samband inom naturvetenskapen är inte dimensionsinvarianta. Låt mig ge ett exempel på ett samband som inte är det. Vid tillverkning av ammoniak med Haber-Bosch-metoden så är utbytet av ammoniak en funktion av tryck och temperatur. För varje tillverkningstillfälle x gäller att

$$\text{utbyte}(x) = f(\text{temp}(x), \text{tryck}(x))$$

Funktionen f är en mycket komplicerad funktion och den är inte dimensionsinvariant. Vill man ange det analytiska uttrycket för f, som kanske ingen egentligen har försökt sig på, så är det viktigt vilka enheter som man uttrycker temperatur och tryck i.

Som redan påpekats är den klassiska fysikens lagar normalt dimensionsinvarianta. Varför är det så? Låt mig till att börja med ange två möjliga svar på den frågan.

1) Att fysikaliska lagar är dimensionsinvarianta avspeglar en egenskap hos den fysikaliska verkligheten och kräver därför en fysikalisk förklaring.

2) Att fysikaliska lagar är dimensionsinvarianta är ett historiskt faktum snarare än ett fysikaliskt. Vill man förstå varför fysikaliska lagar är dimensionsinvarianta måste man förstå hur vissa grundläggande element i den fysikaliska teoribildningen har utvecklats, nämligen vårt sätt att beskriva kvantitativa samband.[7]

Vad skulle det då kunna vara för historisk utveckling som till någon del kan förklara dimensionsinvariansen? Låt oss se lite närmare på detta.

Man kan visa att sambandet

---

[7] Jag vill inte påstå att (1) och (2) är de enda möjliga alternativen. T.ex. kan det finnas många intressanta blandningar av (1) och (2).

$$\forall x \in X: \ h_0(x) = f(h_1(x), h_2(x))$$

är dimensionsinvariant omm det finns en funktion g sådan att

$$\forall x,y \in X: \ h_0(x)/h_0(y) = g(h_1(x)/h_1(y), h_2(x)/h_2(y))$$

Ett samband är alltså dimensionsinvariant omm det innebär funktionssamband mellan kvoter. Fysikaliska lagar, vilka normalt är dimensionsinvarianta, innebär alltså funktionssamband mellan kvoter. Det gäller däremot inte de flesta andra kvantitativa samband inom naturvetenskapen, t.ex. inte sambandet mellan utbyte och temperatur och tryck vid tillverkningen av ammoniak enligt Haber-Bosch-metoden.

Proportionsläran är ett icke-aritmetiskt sätt att uttrycka just funktionssamband mellan kvoter och är därmed utmärkt för att formulera dimensionsinvarianta samband. Däremot kan proportionsläran inte formulera sambandet mellan utbyte, temperatur och tryck vid tillverkning av ammoniak enligt Haber-Bosch-metoden. Och inte heller alla andra kvantitativa samband i naturvetenskapen som inte är dimensionsinvarianta och som inte brukar kallas lagar (i vart fall inte fysikaliska lagar).

Som tidigare påpekats var det sätt att formulera kvantitativa samband som vetenskapsmännen hade till sitt förfogande från antiken fram till och med Newton Eudoxos' proportionslära. Man kan därför fråga sig om proportionsläran har styrt hur vi ser på fysikaliska lagar, t.ex. genom att en fysikalisk lag ska vara uttrycksbar i proportionsläran och därmed dimensionsinvariant. Om vi inte hade olika lagar för gravitationell och elektromagnetisk kraft mellan två kroppar utan uttryckte detta med *en* lag så skulle den inte bli dimensionsinvariant. Användandet av proportionsläran kan därför ha lett till uppdelning av vissa kvantiteter i delar (t.ex. kraft i gravitationell och elektromagnetisk). Utan proportionsläran kan således den fysikaliska teoribildningen ha sett annorlunda ut. Finnas det månne en hel skrälldus med samband som vi skulle vara betjänta av att beakta men som vi inte har fått fatt på helt enkelt därför att vi från början inte hade ett adekvat sätt att hantera dem?

8. Proportionsfunktioner

När det gäller att studera uttryckskraften i proportionsläran som språk eller metod för att formulera kvantitativa samband, dvs. innebörden i funktionssamband mellan kvoter, är det lämpligt att studera en viss typ av funktioner som definieras i Mundy (1988) och där kallas "ratio functions", men som jag här ska kalla "proportionsfunktioner" (ibland enbart "proportioner"). En proportionsfunktion är en funktion från den Cartesianska produkten av en mängd X med sig själv till de positiva reella talen, dvs. $\rho:X \times X \to Re^+$, som uppfyller följande villkor som jag ska kalla *proportionsvillkoret:*[8]

$$\forall x,y,z \in X: \ \rho(x,y) \cdot \rho(y,z) = \rho(x,z).$$

Notera att $\rho(x,x)=1$ och $\rho(x,y)=1/\rho(y,x)$. Ty

$$\rho(x,x) \cdot \rho(x,x) = \rho(x,x)$$

och

$$\rho(x,y) \cdot \rho(y,x) = \rho(x,x) = 1.$$

För att förstå intresset med proportionsfunktioner bör man observera följande: Eftersom fysikaliska kvantiteter har mått på kvotskala gäller för alla mått h_i, h_i' för Q_i att för alla $x,y \in X$

$$h_i(x)/h_i(y) = h_i'(x)/h_i'(y).$$

Detta är ju själva poängen med kvotskala. Vi kan därför definiera

$$k_i(x,y) = h_i(x)/h_i(y)$$

där $k_i(x,y)$ alltså betecknar förhållandet mellan x och y såsom Q_i-storheter, dvs. förhållandet mellan x_i:s Q_i och y_i:s Q_i. k_i är en proportionsfunktion, ty uppenbarligen gäller

$$\forall x,y,z \in X: \ k_i(x,y) \cdot k_i(y,z) = k_i(x,z).$$

Proportionsfunktioner ger ett mycket användbart sätt att karakterisera kvantiteter Q_i som har mått på kvotskala. Givet mått för Q_i kan vi definiera en proportionsfunktion som k_i ovan. Och givet proportionsfunktionen ρ_i för en kvantitet Q_i kan vi definiera ett mått h_i för Q_i genom

$$h_i(x) = \rho_i(x,e).$$

---

[8]Funktioner definierade av att de uppfyller det som här kallas proportionsvillkoret används i Odelstad 1990, sid. 173f., i Odelstad 1991a, sid. 34f. och i Odelstad 1991b, sid. 117.

där objektet e alltså spelar rollen av enhet (ty $h_i(e) = \rho_i(e,e) = 1$). h_i är således en homomorfi från Q_i till $\langle Re^+, \geq, + \rangle$.

Hölder framhöll i sin uppsats från 1901 att det finns två uppfattningar av proportionsläran, dels den som utvecklades i antiken och enligt vilken förhållandet mellan storheter inte är tal men kan jämföras med tal, och dels den som går tillbaka åtminstone till Newton och enligt vilken förhållandet mellan storheter är tal. Den förra kallar Hölder för den traditionella och den senare kallar han för den moderna. Att se proportionsläran som handlande om en binär funktion som uppfyller proportionsvillkoret skulle man därför kanske kunna kalla *den postmoderna uppfattningen av proportionsläran.*

9. *Proportionsläran och dimensionella konstanter*

Inom ramen för den postmoderna proportionsläran kan vi skriva kvantitativa samband på följande sätt:

$$\forall x,y \in X: \ \rho_0(x,y) = g\big(\rho_1(x,y), \rho_2(x,y)\big)$$

där r_i uppfyller proportionsvillkoret. Detta svarar alltså mot dimensionsinvarianta samband mellan mått. Det är nu lätt att se vilket krav proportionsvillkoret lägger på g. Eftersom

$$\forall x,y,z \in X: \ \rho_0(x,y) \cdot \rho_0(y,z) = \rho_0(x,z).$$

gäller

$$g\big(\rho_1(x,y), \rho_2(x,y)\big) \cdot g\big(\rho_1(y,z), \rho_2(y,z)\big) =$$
$$= g\big(\rho_1(x,z), \rho_2(x,z)\big) = g\big(\rho_1(x,y)\cdot\rho_1(y,z), \rho_2(x,y)\cdot\rho_2(y,z)\big)$$

Alltså gäller under vissa rimliga villkor att

$$g(r_1 \cdot s_1, r_2 \cdot s_2) = g(r_1, r_2) \cdot g(s_1, s_2).$$

Detta villkor kan kanske kallas multiplikationsvillkoret för g. Under lämpliga villkor om kontinuitet innebär det enligt ett välkänt resultat i teorin för funktionalekvationer att g måste vara på formen

$$g(r,s) = r^p \cdot s^q.$$

Således gäller

$$\forall x,y \in X: \ \rho_0(x,y) = \rho_1(x,y)^p \cdot \rho_2(x,y)^q.$$

Observera att några konstanter inte finns med. Hur kommer då konstanterna in?

Jo, konstanterna dyker upp vid val av enhet. Låt oss betrakta följande samband mellan proportioner:

$$\forall x,y \in X: \ \rho_0(x,y) = g(\rho_1(x,y), \rho_2(x,y))$$

Välj för ρ_i en enhet e_i och definiera

$$h_i(x) = \rho_i(x,e_i).$$

Vi erhåller då

$$\begin{aligned} h_0(x) &= \rho_0(x,e_0) = g(\rho_1(x,e_0), \rho_2(x,e_0)) = \\ &= g(\rho_1(x,e_1)\cdot\rho_1(e_1,e_0), \rho_2(x,e_2)\cdot\rho_2(e_2,e_0)) = \\ &= g(\rho_1(x,e_1), \rho_2(x,e_2)\cdot g(\rho_1(e_1,e_0), \rho_2(e_2,e_0)) = \\ &= g(\rho_1(e_1,e_0), \rho_2(e_2,e_0))\cdot g(h_1(x),h_2(x)). \end{aligned}$$

Här dyker en konstant C upp, nämligen

$$C = g(\rho_1(e_1,e_0), \rho_2(e_2,e_0)).$$

C kan vara en dimensionell konstant, ty C:s värde kan bero på valet av enheterna e_0, e_1 och e_2. C är en funktion där argumenten i detta fall är e_0, e_1 och e_2, dvs. egentligen

$$C(e_0,e_1,e_2) = g(\rho_1(e_1,e_0), \rho_2(e_2,e_0)).$$ [9]

De dimensionella konstanterna är intimt förknippade med funktionssamband mellan kvoter, ty de dyker upp när vi uttrycker dylika samband som samband mellan mått.

Observera att funktionssamband mellan kvoter när de uttrycks som funktionssamband mellan mått är på formen

$$\forall x,y \in X: \ h_0(x) = C\cdot h_1(x)^p\cdot h_2(x)^q.$$

Detta är alltså den typiska formen hos en fysikalisk lag (något som sedan länge har varit ett allmänt accepterat faktum).

[9] Notera att $C(e_0,e_1,e_2) = \rho_1(e_1,e_0)^p \cdot \rho_2(e_2,e_0)^q$.

Vad gäller då om dimensionslösa konstanter? Hur kommer de in? Låt oss ta ett mycket enkelt exempel som mer hör hemma i geometrin än i fysiken.

Låt X vara klassen av cirklar, $\rho_0(x,y)$ förhållandet mellan längden hos x:s och y:s omkrets, $\rho_1(x,y)$ förhållandet mellan längden hos x:s och y:s diameter. Som bekant gäller att omkretsarna förhåller sig som diametrarna, dvs.

$$\forall x,y \in X: \ \rho_0(x,y) = \rho_1(x,y)$$

Men observera nu att proportionerna ρ_0 och ρ_1 båda är längdproportioner. Låt λ vara proportionen knuten till dimensionen längd, dvs. $\lambda(a,b)$ är förhållandet mellan längderna a och b. Om vi låter o(x) vara omkretsen av x och d(x) vara diametern i x så erhåller vi

$$\rho_0(x,y) = \lambda(o(x),o(y))$$
$$\rho_1(x,y) = \lambda(d(x),d(y))$$

och således

$$\forall x,y \in X: \ \lambda(o(x),o(y)) = \lambda(d(x),d(y)).$$

Det är viktigt att här göra distinktionen mellan *aspekt* och *dimension*. Omkretslängd och diameterlängd är olika aspekter på klassen av cirklar men de är båda av dimensionen längd. Man kan se det så, att det som aspekterna omkretslängd och diameterlängd har gemensamt är dimensionen längd. Observera att då det gäller gravitationslagen så är det mindre objektets massa och det större objektets massa olika aspekter på tvåkroppssystem, medan massa är en dimension. Med en fysikalisk kvantitet kan antingen avses en aspekt eller en dimension. De grundläggande dimensionerna är få (massa, längd, tid och laddning), medan aspekterna är många.

Välj nu enheten e för längddimensionen. Vi erhåller

$$\forall x,y \in X: \ \lambda(o(x),o(y)) = \lambda(d(x),d(y)) \ \text{omm}$$
$$\forall x,y \in X: \ \lambda(o(x),e) \cdot \lambda(e,o(y)) = \lambda(d(x),e) \cdot \lambda(e,d(y)) \ \text{omm}$$
$$\forall x,y \in X: \lambda(o(x),e) = \lambda(d(x),e) \cdot \lambda(o(y),e) \cdot \lambda(e,d(y)) \ \text{omm}$$
$$\forall x,y \in X: \lambda(o(x),e) = \lambda(o(y),d(y)) \cdot \lambda(d(x),e).$$

Låt oss nu gå över till mått och vi definierar därför

$$\eta(a) = \lambda(a,e).$$

Av det som sagts ovan följer

$$\forall x,y \in X:\ \eta(o(x)) = \lambda(o(y),d(y)) \cdot \eta(d(x)).$$

Konstanten som dyker upp är alltså

$$\lambda(o(y),d(y)).$$

Som bekant är detta en konstant helt oberoende av valet av y och den är alltså dimensionslös. Vi brukar kalla denna konstant för π. π:s numeriska värde är c:a 3,14 och vi behöver inte ange några enheter här. Men det innebär inte att inte också π:s numeriska värde beror på vissa förhållanden och att alltså även π bör ses som en funktion.

11. π och finstrukturkonstanten som funktioner

För att förstå π som en funktion måste vi se på hur man genom en transformation kan erhålla en ny proportionsfunktion av en given proportionsfunktion. Låt φ vara en homomorfi av $\langle Re^+,\cdot\rangle$ på en numerisk struktur $\langle Re^+,*\rangle$. Det innebär att
$\varphi: Re^+ \rightarrow Re^+$ och

$$\forall r,s \in Re^+:\ \varphi(r \cdot s) = \varphi(r) * \varphi(s).$$

Om ρ är en proportion (m.a.p. multiplikation) så kommer $\varphi\circ\rho$ att uppfylla proportionsvillkoret för $*$, dvs.

$$\forall x,y,z \in X:\ (\varphi\circ\rho)(x,y) * (\varphi\circ\rho)(y,z) = (\varphi\circ\rho)(x,z)$$

ty

$$(\varphi\circ\rho)(x,z) = \varphi(\rho(x,z)) = \varphi(\rho(x,y)\cdot\rho(y,z)) =$$
$$= \varphi(\rho(x,y)) * \varphi(\rho(y,z)) = (\varphi\circ\rho)(x,y) * (\varphi\circ\rho)(y,z).$$

Låt oss säga att $\varphi\circ\rho$ är en *transformation* av ρ. $*$ kan vara multiplikation men behöver inte vara det. Om φ är kvadratrotsfunktionen, dvs. $\varphi(r)=\sqrt{r}$, så är $*$ multiplikation. Om φ är logaritmfunktionen, dvs. $\varphi(r)=\ln(r)$, så är $*$ addition och proportionsvillkoret för $\ln\rho$ säger att

$$\forall x,y,z \in X:\ \ln\rho(x,y) + \ln\rho(y,z) = \ln\rho(x,z).$$

Vanligtvis väljer man en proportion som svarar mot att representera de fysikaliska kvantitetsstrukturerna med den traditionella numeriska strukturen $\langle Re^+, \geq, + \rangle$. En dylik proportion kallar vi *traditionell*. Att välja en transformation av en dylik proportion svarar mot att välja en annan icke-traditionell numerisk struktur att representera med. Att använda sig av $\sqrt{\rho}$ om ρ är den traditionella proportionen svarar mot att representera kvantitetsstrukturerna med $\langle Re^+, \geq, \oplus \rangle$, där $\oplus$ definieras som tidigare. (Denna numeriska struktur kallas med Uppsalajargong för den Marsianska representationen.)

Låt oss så återvända till π. Varför har π värdet 3,14? Det låter som en konstig fråga. Icke förty ska jag här ge *ett* svar på den (det kan finnas fler): π har närmevärdet 3,14 därför att vi använder oss av en traditionell proportionsfunktion för längd, dvs. förhållandet mellan en cirkels omkrets och dess diameter är c:a 3,14 om förhållandet förstås i termer av en traditionell proportion. Att använda traditionella proportioner är detsamma som att representera de kvalitativa, empiriska strukturerna med $\langle Re^+, \geq, + \rangle$. Representerar vi längd med en annan numerisk struktur, dvs. använder vi en transformerad proportion, så får vi ett annat värde på π. Vi kan därför se p som en funktion som för olika slag av proportioner — och därmed olika numeriska strukturer — antar olika reella tal som värden. Förhållandet mellan en cirkels omkrets och diameter är konstant — det är bestämt av naturen skulle man kanske kunna säga — men π:s värde beror på val vi gjort.

Låt oss slutligen återvända till finstrukturkonstanten. Varför har finstrukturkonstanten värdet 1/137? Analogt med vad som gäller för π så kan *ett* svar vara: Finstrukturkonstanten har värdet 1/137 därför att vi använder oss av traditionella proportioner, dvs. vi representerar kvantitetsstrukturerna med $\langle Re^+, \geq, + \rangle$. Med transformerade proportionsfunktioner och därmed alternativa numeriska strukturer så kan finstrukturkonstanten få helt andra värden. Vi behöver f.ö. inte ha samma proportionstyp och numeriska struktur för alla kvantiteter.

Eddington skulle naturligtvis inte vara nöjd med detta svar. Hans reaktion skulle förmodligen vara att hans fråga gällde vilket värde finstrukturkonstanten har då vi använder oss av traditionella proportioner, dvs. representerar med $\langle Re^+, \geq, + \rangle$. På detta har jag inget svar att föreslå. Lika lite som jag då det gäller π har ett svar på frågan varför då vi använder oss av den traditionella proportionsfunktionen för längd π har närmevärdet 3,14. Vad jag vill påpeka är att finstrukturkonstanten visserligen är konstantare än det mesta i fysiken men att den trots allt egentligen är en funktion som för olika val av proportionstyp (och därmed olika val av numerisk struktur att representera med) antar olika värden. Även dimensionslösa konstanters värden beror alltså av val som vi gjort och kunde ha gjort annorlunda. Och detta är kanske något som en teori om finstrukturkonstantens värde som Eddington sökte efter måste beakta. Jag tror också detta är av betydelse i samband med de då och då uppblommande spekulationerna om en dimensionslös fysik.

Bibliografi

Dedekind, Richard 1963. *Stetigkeit und irrationale Zahlen,* 1872. Engelsk översättning: *Continuity and irrational numbers,* 1901, omtryckt i Dedekind: *Essays on the Theory of Numbers,* London, 1963.

Descartes, René 1959. *La Geometrie,* 1637. Svensk översättning av de åtta första sidorna återfinns i *Sigma. En matematikens kulturhistoria,* Stockholm, 1959.

Galilei, Galileo 1974. *Discorsi intorno a due nuove scienze,* 1638. Engelsk översättning: *Two New Sciences.* Translated with Introduction and Notes, by Stillman Drake, London, 1974.

Gamow, George 1970. "The three kings of physics" i W. Yourgrau & A.D. Beck (red.): *Physics, Logic and History,* New York.

von Helmholtz, Hermann 1887. "Zählen und Messen, erkenntnisstheoretisch betrachtet" i *Philosophische Aufsätze, Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doctorjubiläum gewidmet.* Leipzig 1887, sid. 17-52. Omtryckt i *Wissenschaftliche Abhandlungen,* Vol. 3, Leipzig, 1895, sid. 356-391. Engelsk översättning: "Numbering and measuring from an epistemological viewpoint" i Hermann von Helmholtz: *Epistemological writings,* Boston Studies in the Philosophy of Science, Vol. XXXVII, Dordrecht, 1971.

Hölder, Otto 1901. "Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass". *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Classe.* Dreiundfünfzigster Band.

Krantz, D.H., Luce, R.D., Suppes, P. & Tversky, A. 1971. *Foundations of measurement,* Vol. I, New York.

Mundy, Brent 1988. *Extensive measurement and ratio functions,* Synthese, **75**, sid. 1-23.

Newton, Isaac 1967. *Arithmetica Universalis,* 1684. Översatt till engelska 1720 som *Universal Arithmetick* och i en utgåva från 1728 omtryckt i *The Mathematical Works of Isaac Newton,* Vol. 2, New York, 1967.

Odelstad, Jan 1981. "Några fragment ur mätningsteorins historia från Hedenhös till Suppes", i Wlodzimierz Rabinowicz (red.): *Tankar och tankefel. Tillägnade Zalma*

Puterman 50 år. Uppsala Philosophical Studies, No 34.

Odelstad, Jan 1982. "Om kvantitativa samband", i T. Pauli (red.): *⟨320311⟩ Philosophical essays dedicated to Lennart Åqvist on his fiftieth birthday*. Uppsala Philosophical Studies, No 34.

Odelstad, Jan 1990. *Mätning och beslut. Sju uppsatser om meningsfullhet, amalgamering och begreppet funktion*. Uppsala Philosophical Studies, No 34.

Odelstad, Jan 1991a. *Taxiproblemet och det sannolikhetsteoretiska experimentbegreppet*. Uppsala Prints and Preprints in Philosophy, 1991 Number 1, Reprinted 1992.

Odelstad, Jan 1991b. "Att tillämpa beslutsteori i praktiken: exemplet intresseavvägning vid stadsplanering", i Wlodzimierz Rabinowicz (red.): *Valets vedermödor. Sex beslutsteoretiska studier*, Thales.

Strömer, Mårten 1828. *De Sex Första jemte Elfte och Tolfte Böckerna af Euklidis Elementa*. Sjätte upplagan, Örebro.