OM KVANTITATIVA SAMBAND

Jan Odelstad

I

Kvantifiering har kommit att spela en stor roll inom allt fler vetenskaper. Det är inte längre bara inom naturvetenskaperna som kvantitativa metoder är vanligt förekommande. Även inom samhälls- och humanvetenskaperna försöker man i många sammanhang anlägga ett kvantitativt betraktelsesätt. Huruvida det är ett steg i rätt eller fel riktning är en omdiskuterad fråga. Jag ska här helt gå förbi denna. I stället ska jag uppehålla mig vid två aspekter på hur vi formulerar kvantitativa samband.

Någon definition av vad som ska menas med "kvantitativt samband" ska jag inte försöka mig på. Vagt kan man säga att ett kvantitativt samband (av enklaste slag) uttrycker förhållandet mellan hur stort något är i ett visst avseende och hur stort något (ev annat) är i samma eller annat avseende; ett kvantitativt samband utsäger alltså hur mycket något har av en viss aspekt och hur mycket något (ev annat) har av samma eller någon annan aspekt. Jag ska här begränsa mig till en speciell typ av kvantitativa samband, nämligen sådana som uttrycker likhet. För att försöka belysa vilken typ av kvantitativa samband som jag har i tankarna, ska jag ge fem exempel. Exemplen är valda från elementär matematik och naturvetenskap för att de ska vara välkända och okontroversiella.

(1) Pythagoras' sats: Om i en rätvinklig triangel a och b är kateternas längder och c hypotenusans längd, så är

$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

(2) Om en sfär har radien r och volymen V, så gäller

$$V = 4\pi r^3/3 .$$

(3) Keplers tredje lag: Om T är omloppstiden för en planet och a dess medelavstånd till solen, så är

$$T^2 = k \cdot a^3$$

där k är en konstant.

(4) Lagen för fritt fall: Om för en kropp i fritt fall t är falltiden och s är längden på fallsträckan, så är

$$s = k \cdot t^2$$

där k är en konstant.

(5) Gravitationslagen:

$$F = C \cdot m_1 \cdot m_2 / r^2$$

där m_1 är den ena kroppens massa i kg, m_2 är den andra kroppens massa i kg, r är avståndet mellan kropparna i m, F är kraften mellan kropparna i N och $C = 6,67.10^{-11} Nm^2/kg^2$.

(1) och (2) är kvantitativa samband av matematiskt slag, medan (3)-(5) är hämtade från de fysikaliska vetenskaperna. (3),(4) och (5) är exempel på kvantitativa samband av det slag som brukar kallas "numeriska lagar"; de är empiriska lagar och de har i viss mening numerisk form. (1) och (2) brukar inte kallas lagar utan är matematiska satser eller teorem. Men de har samma numeriska karaktär som "numeriska lagar". Denna numeriska karaktär består i att a,b och c i (1), V och r i (2), T,k och a i (3), s,k och t i (4) och F, C, m_1, m_2 och r i (5) har reella tal som värden; vi utför aritmetiska operationer på dem.

Kvantitativa samband formuleras med hjälp av matematiska begrepp. Men (1)-(5) är inte enbart uttryckta i termer av matematiska begrepp, utan också i det matematiska formelspråket, dvs med hjälp av formler, närmare bestämt såsom ekvationer. Och det är ingen tillfällighet. Där är gängse att formulera den typ av kvantitativa samband som jag här betraktar på detta sätt. Det är också gängse att - liksom i exemplen - termerna i ekvationerna på ett eller annat sätt refererar till tal, dvs de formler som används för att uttrycka samband får i viss mening "numerisk karaktär".

Exemplen ovan illustrerar alltså två karakteristiska egenskaper hos vårt sätt att formulera kvantitativa samband, nämligen (i) att vi använder formler och (ii) att termerna i dessa i viss mening är numeriska. Jag vill betona att detta är två egenskaper hos vårt sätt att uttrycka sambanden och inte hos sambanden själva. Det är nämligen inte nödvändigt att formulera dem på detta sätt. Kvantitativa samband av detta slag har tidigare formulerats helt annorlunda, och vårt sätt att formulera dem är resultatet av en lång utveckling. Det är några aspekter på denna utveckling som jag ska se närmare på här. Syftet med framställningen är inte idéhistorisk, utan förhoppningen är att det ska bli klarare vad vårt sätt att ange kvantitativa samband egentligen innebär.

Det numera vanliga sättet att formulera kvantitativa samband ska jag i fortsättningen kalla aritmetisk-algebraiskt. Det är aritmetiskt därigenom att talen i så hög grad är inblandade, dvs på grund av den numeriska karaktären. Varför det är algebraiskt fordrar kanske en längre förklaring.

En viktig innebörd i termen "algebra" är "bokstavsräkning". Man kan därför säga att "Algebra is the expression of relationships between numbers by use of general symbols" (Encyclopedia Britannica, uppslagsord Mathematics, History of). Uppfattad på detta sätt är algebran en generaliserad form av aritmetik; Newton kallar t ex sin lärobok i algebra för "Arithmetica Universalis". Och det är givet att vi använder denna generaliserade form av aritmetik då vi formulerar kvantitativa samband på det sätt som görs i (1)-(5), eftersom vi använder det algebraiska symbol- och teckenspråket.

Här har jag tagit fasta på den historiskt ursprungliga innebörden hos algebrabegreppet, nämligen algebra som "bokstavsräkning" och generaliserad form av aritmetik. Men termen algebra används också med annan innebörd. I matematikhistorisk litteratur ger man ofta exempel på tidiga former av verbaliserad, icke-symbolisk algebra. Med algebra avser man då teorin för ekvationslösande. Ibland anses också algebra handla om ändliga processer. Numera är det också vanligt att med algebra avse studiet av strukturer uppbyggda av operationer (struktur då närmast i mängdteoretisk mening).

Det aritmetisk-algebraiska sättet att ange kvantitativa samband har, som tidigare påpekats, inte alltid använts utan är resultatet av en lång utveckling som berör flera delar av matematiken. Här ska jag göra några anmärkningar om denna utveckling utifrån en mätningsteoretisk synpunkt. För att antyda vilket perspektiv jag därmed anlägger och varför det kan vara relevant med ett sådant perspektiv, ska jag säga några ord om mätning och mätningsteori.

II

Mätning kan sägas innebära standardiserad jämförelse med avsikt att bestämma hur mycket objekt har av en viss egenskap. En mätning av elementen i A med avseende på egenskapen E innebär alltså att man fastställer hur mycket objekten i A har av E, dvs i vilken grad egenskapen E tillkommer objekten i A. För att formulera resultatet av en mätning används i väsentlig utsträckning matematiska begrepp. Särskilt spelar talen här stor roll. Man kan säga att genom mätning knyts det empiriska och det matematiska ihop, dvs tillämpning av matematik på empiriska företeelser blir möjligt. Mätning utgör alltså en viktig ingrediens vid tillämpning av matematik.

Med mätningsteori avses de teoretiska aspekterna på mätning. Hit hör frågan om hur resultat av mätning ska formuleras och alltså frågan om talens roll i detta sammanhang. Vissa delar av matematiken kan rent av ses som en teori för hur mätningsresultat ska anges. Därmed får också problemet med tillämpning av matematik i empiriska sammanhang, speciellt då användande av tal, även en mätningsteoretisk aspekt.

Också frågeställningen om hur man formulerar kvantitativa samband står mätningsteorin nära. Grovt kan ju kvantitativa samband ses som samband mellan resultat av olika mätningar. Hur mätningsresultat anges har därför betydelse för hur kvantitativa samband ska uttryckas.

Den syn man har på talens användning för att ange mätningsresultat har alltså stor betydelse för hur man formulerar kvantitativa samband. Numera är det vanligt att ange resultat av mätning genom att tillordna tal till de objekt man mäter, så att talens storlek uttrycker i vilken grad den egenskap man mäter tillkommer objekten. Ja, det är så vanligt att mätning ofta sägs innebära en taltillordning. Men det är viktigt att komma ihåg att taltillordning bara är ett sätt att ange mätningsresultat, och att mätning (såsom mätande, dvs en verksamhet) snarast innebär standardiserad jämförelse.

Som framhölls i avsnitt I så är vårt vanliga sätt att formulera kvantitativa samband i viss mening numeriskt. Och som nyss nämnts uttrycker vi mätningsresultat normalt genom taltillordning, dvs talen kommer in vid mätning genom att de tillordnas objekt. Dessa två saker sammanhänger i hög grad med varandra. En annan syn på talens roll i samband med mätning skulle göra ett annat sätt att formulera kvantitativa samband naturligt. Och ett annat sätt att ange kvantitativa samband skulle kräva en annan uppfattning om talens användning. Att anlägga ett mätningsteoretiskt perspektiv på framväxten av det aritmetisk-algebraiska sättet att formulera kvantitativa samband, är därför att se det i förhållande till förändringar i uppfattningen av talens roll i samband med angivande av mätningsresultat.

III

Inom den antika grekiska vetenskapen hade man en helt annan syn på talens roll vid mätning, och ett helt annat sätt att ange kvantitativa samband än vi har idag. Men det är klart att vår uppfattning ändå har sina rötter i den grekiska och kan uppfattas som erhållen genom successiva avsteg från eller modifieringar av denna.

Grekerna skapade aldrig det reella talsystemet. Med tal menade de positiva hela tal. Rationella tal, dvs bråk, uppfattade man som förhållanden mellan hela tal. Och för de irrationella talen hade man inget begrepp. Men man hade något annat i stället, nämligen begreppet storhet. Storhetsbegreppet spelade i den grekiska matematiken en helt annan roll än det gör i vår tids matematik. (Fortfarande är storhetsbegreppet flitigt i bruk, men inte så mycket inom matematiken.)

Enligt den grekiska matematiken finns det storheter av olika slag. Storheter av samma slag kan jämföras med avseende på storlek, dvs för två storheter av samma slag gäller att de antingen är lika stora eller den ena större än den andra. Vidare gäller att en storhet alltid kan ökas med en storhet av samma slag, vilket innebär att två eller flera storheter av samma slag kan tas tillhopa, "adderas", och bilda en ny storhet. Det är också möjligt att ta bort en mindre storhet från en större. Något av vad som tänks gälla vid dylika operationer med storheter framgår av axiomen i bok I av Euklides' Elementa. De tre första lyder:

> 1. De som är lika stora med ett och samma, äro sins emellan lika stora.
>
> 2. Om man lägger lika stora till lika stora, så blifva de hela lika stora.
>
> 3. Om man tager lika stora ifrån lika stora, så äro de återstående lika stora.

(Här liksom i fortsättningen vid citat ur Elementa har jag följt sjätte upplagan från 1828 av Mårten Strömers svenska översättning, ursprungligen från 1740-talet.)

Med storhet avses idag ofta "något som kan mätas" (Se Sjöstedt (1960) sid 25). Och tolkar man mätning som "standardiserad jämförelse" så är en storhet det som kan jämföras med avseende på storlek, dvs väsentligen det som har storlek.

För den grekiska matematiken var det, som nämnts, viktigt att storheter kan tas tillsammans och bilda en ny storhet. Därigenom kommer för grekerna storhetsbegreppet att få en snävare innebörd än det har idag, och motsvarar närmast vad vi skulle kalla "extensiv storhet", dvs storheter som kan adderas.

Men frågan är om inte även storhet som "det som kan mätas" är en för snäv definition. Det tycks finnas företeelser som inte kan jämföras med avseende på storlek men vilka ändå gärna kallas storheter. Vad skulle i så fall vara det utmärkand[illegible]r storheter? Kanske att de erhålles genom abstrakti[illegible] storhet skulle alltså i så fall vara ett objekt men [illegible]ng. Storheter som kan jämföras med avseende på storlek s[illegible]ulle då lämpligen kallas komparativa storheter.

Exempel på storheter som inte är komparativa skulle kunna vara punkter, sträckor, linjer, trianglar och andra geometriska figurer samt vad som inom fysiken kallas kroppar och fysiska föremål. Det skulle kunna invändas att t ex sträckor mycket väl kan sinsemellan jämföras med avseende på storlek, närmare bestämt med avseende på deras längdstorlek. Men man jämför i så fall sträckorna med avseende på en aspekt på dem, nämligen längd, varför det egentligen är sträckornas längder som är komparativa storheter. För att en storhet ska vara komparativ ska den som sådan kunna vara föremål för en standardiserad jämförelse, och det räcker inte med att den i ett visst avseende kan jämföras, dvs det räcker inte att en aspekt på den kan vara föremål för jämförelse.

Grekernas grundläggande idé om relationen mellan storheter och tal var att bilda förhållandet mellan storheter av samma slag och sedan jämföra förhållandena med avseende på storlek. Läran om förhållandet mellan storheter och tal fick i antiken sin slutgiltiga formulering i den av Eudoxos, på 300-talet f Kr, skapade proportionsläran. Den klassiska framställningen av denna ger Euklides i Bok V av Elementa. Jag ska här återge de första sju definitionerna ur denna bok.

> 1. En mindre storhet kallas part utaf en större storhet, om den mindre mäter den större; det är, innehålles jämt uti henne, så att ingen del blifver öfver.
>
> 2. Men en större storhet kallas mångfaldig utaf den mindre, om den mindre mäter den större.
>
> 3. Proportion kallas det förhållande, som är emellan tvänne storheter af samma slag i anseende till deras quantitet.
>
> 4. De storheter sägas hafva proportion sins emellan, eller vara af samma slag, om hvilka man kan begripa, att den ena kan tagas så många gångor, att hon blifver större än den andra.
>
> 5. Storheter sägas vara i samma proportion, den första till den andra, och den tredje till den fjerde, om den förstas och tredjes lika mångfaldige, jemförde med den andras och fjerdes lika mångfaldige, ehuru mångfaldige de må vara, äro båda tillika större, lika store eller mindre, än de lika mångfaldige af den andra och fjerde, om de jemföras, som svara emot hvarandra.
>
> 6. De storheter, som äro i samma proportion, sägas vara proportionela.
>
> 7. När den förstas mångfaldiga är större än den andras; men den tredjes icke större än den fjerdes; så säges den första hafva till den andra en större proportion, än den tredje till den fjerde.

Förhållandet mellan två storheter a och b av samma slag brukar betecknas a:b och den n-te multiplen av a, dvs n stycken a tagna tillsammans, skrivs ofta na. Definition 5 kan då skrivas på följande för en nutida läsare mer lättöverskådliga sätt:

$$a:b = c:d$$

om och endast om för alla positiva hela tal m och n:

$$m \cdot a > n \cdot b \;\&\; m \cdot c > n \cdot d \quad \text{eller}$$
$$m \cdot a = n \cdot b \;\&\; m \cdot c = n \cdot d \quad \text{eller}$$
$$m \cdot a < n \cdot b \;\&\; m \cdot c < n \cdot d.$$

Av definition 7 följer vad $a:b > c:d$ innebär. Det är lätt att inse att om a och b är storheter av samma slag och c och d är storheter av samma slag (men inte nödvändigtvis av samma slag som a och b) så gäller antingen att $a:b > c:d$ eller $a:b = c:d$ eller $c:d > a:b$. Här är det naturligtvis viktigt att med storhet avses extensiv storhet; definitionen av proportionalitet bygger ju på att man kan bilda multipler av storheter.

Förhållandet mellan storheter kan alltså alltid jämföras med avseende på storlek. Nu är tal (i den grekiska betydelsen av ordet, dvs positiva hela tal) storheter varför ett förhållande mellan storheter alltid kan jämföras med ett godtyckligt talförhållande. Däremot gäller inte att varje förhållande mellan storheter är lika med ett talförhållande; t ex är ju förhållandet mellan längden hos diagonalen och sidan i en kvadrat $\sqrt{2}$, som inte kan skrivas som ett förhållande mellan hela tal, och därmed inte är ett talförhållande i grekisk mening. Förhållanden mellan storheter kunde därför inte säkert identifieras med talförhållanden, och det är uppenbart att man inte kunde avvara storhetsbegreppet och enbart klara sig med talbegreppet på det sätt man gör idag. (Med det reella talbegreppet gäller naturligtvis att ett förhållande mellan storheter alltid är lika med inte bara ett talförhållande utan även ett tal; de reella talen kan ju sägas vara skapde för just detta.)

Även om ett förhållande a:b inte är lika med ett förhållande mellan hela tal så kan man alltid med godtycklig noggrannhet approximera a:b med ett sådant, dvs man kan ange ett talförhållande s:t (där s och t är hela tal) så att a:b kommer godtyckligt nära s:t.

Proportionsläran utgör alltså en viktig del av den antika mätningsteorin, och den hade stort inflytande långt fram i tiden. Den ger en teori för hur talen kan användas på empiriska företeelser och därmed hur mätningsresultat kan uttryckas och innebär att förhållandet mellan storheter jämförs med förhållandet mellan positiva hela tal. Proportionsläran står också till tjänst med det grekerna behövde för att formulera kvantitativa samband. Definitionerna 10 och 11 Elementas bok V är här av central betydelse. De lyder:

> 10. Om tre storheter äro proportionela, så säges den första hafva till den tredje en duplicerad proportion af den, som hon har till den andra.
>
> 11. Men om fyra storheter äro proportionela, så säges den första hafva till den fjerde en triplicerad proportion af den, som hon har till den andra. Och så vidare i ordning, en mer, så långt proportionerne räcka.

Definition 10 innebär att om

$$a:b = b:c$$

så är a:c den duplicerade proportionen (det duplicerade förhållandet av a:b. Och analogt innebär definition 11 att om

$$a:b = b:c = c:d$$

så är a:d den triplicerade proportionen av a:b.

För att göra det något klarare vad duplicerad och triplicerad proportion innebär, låt oss anta att a,b,c och d är positiva hela tal och

$$a:b = b:c = c:d.$$

Således är a:c den duplicerade proportionen av a:b och a:d den triplicerade proportionen av a:b. Nu gäller ju att förhållandet mellan två tal a och b är lika med bråket a/b. Därför gäller att

$$a/b = b/c = c/d$$

och man härleder lätt

$$a/c = a^2/b^2 \quad \text{och} \quad a/d = a^3/b^3.$$

Alltså gäller

$$a:c = a^2:b^2 \quad \text{och} \quad a:d = a^3:b^3.$$

$a^2:b^2$ är således den duplicerade proportionen av a:b och $a^3:b^3$ den triplicerade proportionen av a:b. Detta sätt att uttrycka duplicerad och triplicerad var naturligtvis grekerna helt främmande för och fungerar f ö bara då storheterna är tal.

Låt oss så se på några kvantitativa samband formulerade inom proportionslärans ram.

(i) Pythagoras' sats (exempel 1 i I) är sats 47 i Bok I av Elementa och formuleras där

> Uti rätvinklige trianglar, är quadraten, som uppritas på den sidan, som står emot den räta vinkeln, lika stor med quadraterne, som uppritas på sidorna som omfatta den räta vinkeln, tillsammantagne.

För Euklides innebär alltså Pythagoras' sats en "addition" av ytor och inte en addition av tal.

(ii) Satsen om cirkelns yta (sats 2 i Bok XII) lyder:

> Cirklar förhålla sig till hvarandra, såsom quadraterne af deras diametrer.

(iii) Satsen om sfärens volym (Box XII sats 18), som är exempel 2 i I, har följande lydelse:

> Spherer äro till hvarandra uti ett tripliceradt förhållande af deras diametrar.

(iv) Keplers tredje lag (exempel 3 i I) formuleras av Kepler själv så här i Harmonice mundi från 1619:

> Allein es ist ganz sicher und stimmit vollkommen, dass die Proportion, die zwischen den Umlaufszeiten irgend zweier Planeten besteht, genau das Anderthalbe der Proportion der mittleren Abstände, d.h. der Bahnen selber, ist,...
> (Tysk översättning, Kepler (1939) sid 291)

(Det ord i det latinska orginalet som översatts med "Anderthalbe" är "sesquialtera".) Mer i enlighet med Euklides terminologi så skulle lagen kunna formuleras så här: Den duplicerade proportionen av två planeters omloppstider är som den triplicerade proportionen av deras medelavstånd till solen.

(v) Lagen om fritt fall, dvs exempel (4) i avsnitt I, är ett specialfall av ett teorem i Galileis Dialoger rörande två nya vetenskaper från 1638. Detta teorem lyder:

> If a moveable descends from rest in uniformly accelerated motion, the spaces run through in any times whatever are to each other as the duplicate ratio of their times.
> (Engelsk översättning, Galilei (1974) sid 166)

Det sätt man inom proportionslärans ram formulerar kvantitativa samband kan knappast sägas vara vare sig aritmetiskt eller algebraiskt. Det kontrasterar därför mot det moderna sättet att formulera kvantitativa samband, och kan därigenom bidra till att kasta ljus över detta. Dessutom gäller att det aritmetisk-algebraiska sättet kan ses som resultatet av ett antal modifieringar av proportionslärans sätt att formulera kvantitativa samband. Framväxten av det aritmetiska inslaget sammanhänger med en förändring av den syn på talen och deras roll för att ange mätningsresultat som finns i proportionsläran. I korthet innebar förändringen att storheternas roll minskade och talens ökade. Man kan därför tala om en aritmetisering av proportionsläran. Nästa avsnitt är ägnat åt några drag i denna.

IV

Proportionsläran anger alltså en metod som gör det möjligt att jämföra förhållanden mellan extensiva storheter utan att vare sig storheterna eller förhållandet mellan dem är tal. Ett viktigt steg för aritmetiseringen av proportionsläran tas av Descartes i La Geometrie från 1637 då han säger:

> Alla geometriska problem kan lätt reduceras till sådana termer, att det sedan är tillräckligt att känna till längden av vissa räta linjer för att kunna konstruera dem. På samma sätt som aritmetiken består av endast fyra eller fem operationer, nämligen addition, subtraktion, multiplikation, division och rotutdragning, som kan betraktas som ett slags division, så behöver man inom geometrin för att finna sökta linjer endast addera eller subtrahera andra linjer, eller också välja en linje, som jag här skall kalla ett för att sätta den i största möjliga samband med talen, och som vanligen kan väjas godtyckligt, samt därefter ha ytterligare två linjer givna för att finna en fjärde linje, som skall förhålla sig till en av de givna linjerna som den andra linjen till ett (vilket är detsamma som multiplikation), eller också finna en fjärde linje som förhåller sig till en av de givna linjerna som ett till den andra

> (vilket är liktydigt med division), eller slutligen finna en, två eller flera medelproportionaler mellan ett och någon annan linje (vilket är detsamma som att dra kvadratroten, kubikroten etc ur den givna linjen). Och jag kommer utan betänkligheter att införa dessa aritmetiska termer i geometrin för att därmed vinna i klarhet.
> Låt t ex AB vara ett och låt problemet vara att multiplicera BD med BC.
> (Svensk översättning, Sigma sid 189f)

Det ord som här har översatts med "ett" är "unité", vilket kanske hellre bör översättas med "enhet". Den sträcka som Descartes väljer som enhet identifieras alltså med talet ett och fungerar således i sammanhanget som längdstandard.

Descartes' tankegång tycks vara följande. Betraktas storheter av ett och samma slag, så välj en av storheterna som enhet och identifiera den med talet ett. En annan storhet av det aktuella slaget identifieras sedan med det tal r sådant att r förhåller sig till 1 som storheter förhåller sig till den som valts som enhet. På detta sätt identifierar alltså Descates storheter med tal, och därmed blir det möjligt att utföra samma operation med storheterna som med talen.

Newton anger i Arithmetica Universalis från 1684 ett annat sätt att åstadkomma aritmetiseringen av proportionsläran.

> By Number we understand not so much a Multitude of Unities, as the abstracted Ratio of any Quantity, to another Quantity of the same kind, which we take for Unity. And this is threefold; integer, fracted and surd: An Integer is what is measured by Unity, a Fraction, that which a submultiple Part of Unity measures, and a Surd, to which Unity is incommensurable. (Newton (1967) sid 7)

Newton ser alltså förhållanden mellan storheter som tal, vilket gör det möjligt att operera med förhållanden mellan storheter på samma sätt som med tal. Istället för att säga att a förhåller sig till b som det duplicerade förhållandet av c till d, så kan man alltså säga att förhållandet mellan a och b är lika med kvadraten på förhållandet mellan c och d. Och Keplers tredje lag kan då formuleras "the periodic times of the five primary planets... are as the 3/2th power of their mean distances from the sun" (Principia Bok III, Newton (1947) sid. 404).

Aritmetisering av proportionsläran kan alltså erhållas dels genom att förhållandet mellan storheter identifieras med tal och dels genom att storheter identifieras med tal. Det är viktigt att tal här inte uppfattas på samma sätt som i antiken, nämligen som positiva hela tal. Istället ska till talen också räknas positiva bråk och positiva irrationella tal. Aritmetiseringen av proportionsläran sammanhänger alltså med en förändrad och utvidgad syn på talbegreppet.

Hur förhåller sig då de två olika sätten att aritmetisera proportionsläran till varandra? Det är lätt att se att det finns ett nära samband. Identifierar man storheter med tal så ligger det nära till hands att identifiera förhållandet mellan två storheter med kvoten mellan de tal de motsvarar. Och identifierar man förhållanden mellan storheter med tal, så tycks det naturligt att om förhållandet mellan a och b är r så kan man betrakta b som enhet och alltså identifiera a med r och b med 1, dvs a är r då b betraktas som enhet.

Men det finns också skillnader mellan de två tillvägagångssätten för proportionslärans aritmetisering. Här ska jag ta upp en av dessa. Är det förhållanden mellan storheter som identifieras med tal, så är det obenämnda tal som kommer till användning. Identifierar man istället storheter med tal, så använder man istället benämnda tal. Man måste nämligen ange vilken storhet som man valt till enhet, och enheten fungerar därvid som benämning ("sort") för de tal som storheterna identifieras med. Att Newton, som naturligtvis väl kände till Descartes matematiska skrifter, väljer att i de två första böckerna i Principia identifiera förhållandet mellan storheter och inte storheterna själva med tal, beror nog till en del på att han därigenom slipper ifrån problemet med benämningen av talen. I den tredje boken i vilken Newton jämför sina teorier med observationsdata förekommer däremot benämnda tal i form av mätvärden (t ex 905 751 London-fot).

Aritmetiseringen av proportionsläran är alltså ett viktigt led i utvecklingen av det aritmetiska i vårt sätt att formulera kvantitativa samband. Innan vi ser mer på detta är det dock lämpligt att säga något om den algebraiska ingrediensen i de kvantitativa sambandens nutida formulering.

V

Den algebraiska symboliken har rötter långt tillbaka i tiden. Redan Diofantos på 300-talet e Kr använde symboler för att beteckna obekanta i en ekvation. Den förste att systematiskt använda bokstäver som symboler för tal var den franske matematikern Vieta (1540-1603), som betecknade obekanta tal med vokaler och bekanta med konsonanter. Bruket att använda bokstäverna x, y och z för att ange obekanta och alfabetets första bokstäver för att ange bekanta har vi fått från Descartes.

Uttrycker man kvantitativa samband med hjälp av formler på det sätt som görs i exemplen i avsnitt I, så använder man sig naturligtvis av algebraisk symbolism. Som tidigare påpekats är formlerna likheter eller ekvationer. Men de är inte ekvationer i den meningen att man ska bestämma deras lösning. Istället uttrycker likheterna ett förhållande eller samband. Det är därför onaturligt att uppfatta termerna som obekanta respektive bekanta. Den användning man gör av symboler för att ange kvantitativa samband inskränker sig alltså inte till att använda bokstäver för att beteckna bekanta och obekanta i en ekvation. Istället kommer begreppen variabel och konstant att spela stor roll. Enligt en traditionell uppfattning är a, b, c i (1), V och r i (2), T och a i (3), s och t i (4) samt F, m_1, m_2 och r i (5) variabler, medan k i (3) och (4) samt C i (5) sägs vara konstanter. Och enligt samma tradition är t ex den beroende variabeln V en funktion av den oberoende variabeln r i (2) och den beroende variabeln F en funktion av de oberoende variablerna m_1, m_2 och r i (5). Men hur ska detta förstås? Vad menas med variabel och konstant samt med epiteten "beroende" och "oberoende"? Och vad menas med att en variabel är en funktion av en eller flera andra?

Variabelidén uppstod i samband med framväxten av den analytiska geometrin under 1600-talet, och den knöts då till förändringsbegreppet. Ett enkelt exempel får belysa detta. Låt P vara en punkt på en kurva i planet och låt O vara en annan punkt i planet. Längden på sträckan OP är då en storhet, som i fortsättningen kallas x. Om P:s läge på kurvan förändras, t ex om P rör sig längs kurvan, så ändras storheten x; x varierar och är alltså en variabel storhet. Det är naturligt att tänka sig att i det fall P rör sig längs kurvan, så förändras x med tiden, dvs det värde x antar bestäms av den ifrågavarande tidpunkten.

Från modern utgångspunkt är det naturligare, åtminstone i många sammanhang, att uppfatta en variabel som en tillordning än att förstå den utifrån förändringsbegreppet. Lagen för fritt fall (se exempel (4) i avsnitt I) får tjänstgöra som illustration av detta. Låt O vara tillämpningsområdet för lagen, dvs klassen av kroppar i fritt fall. Och låt vidare fallsträckan (egentligen längden på fallsträckan) vara uttryckt i enheten meter och falltiden i enheten sekund. Då är k = 4.91. Falltiden i sekunder och fallsträckan i meter är reellvärda variabler definierade för kroppar i fritt fall och de betecknas i fortsättningen $\underline{t}$ respektive $\underline{s}$. $\underline{t}$ och $\underline{s}$ ska nu uppfattas som tillordningar definierade för O på följande sätt: Om o är en kropp i fritt fall så är $\underline{t}$:s värde för o, som skrivs $\underline{t}(o)$, o:s falltid i sekunder och $\underline{s}$:s värde för o, $\underline{s}(o)$, o:s fallsträcka i meter. Lagen för fritt fall säger nu att för alla o i O så gäller

$$\underline{s}(o) = 4,91 \cdot \underline{t}(o)^2.$$

Det innebär alltså att

$$\underline{s} = 4,91 \cdot \underline{t}^2$$

vilket är ett bekvämt sätt att skriva lagen för fritt fall.

Det finns alltså två olika men ekvivalenta sätt att ange lagen, nämligen:

(a) Om $\underline{s}$ är fallsträckan i meter och $\underline{t}$ är falltiden i sekunder så gäller för alla o i O att

$$\underline{s}(o) = 4,91 \cdot \underline{t}(o)^2.$$

(b) Om $\underline{s}$ är fallsträckan i meter och $\underline{t}$ är falltiden i sekunder så gäller

$$\underline{s} = 4,91 \cdot \underline{t}^2.$$

I formeln i (a) är termerna tal, givna genom en bestämd beskrivning (nämligen som värdet för en variabel) medan i formeln i (b) termerna är reellvärda variabler.

(4) i avsnitt I kan nu antingen uppfattas som (a) eller (b). Uppfattas (4) som (a) så gäller att s = s̲(o) och t = t̲(o) för något o. Vill man vara riktigt utförlig kan man uttrycka sig så här: För alla reella tal s och t gäller att om det finns o i O sådan att s̲(o) = s, t̲(o) = t så gäller

$$s = 4{,}91 \cdot t^2.$$

Uppfattas däremot (4) som (b) så är s = s̲ och t = t̲.

Det är i många avseenden lämpligast att uppfatta (4) som (b). Då anges nämligen lagen enbart av formeln $s = 4{,}91 \cdot t^2$. Uppfattas (4) som (a) så måste man dessutom tillägga att den gäller för en kropp i fritt fall med falltiden t sekunder och fallsträckan s meter. Vidare är det enbart när (4) uppfattas som (b) meningsfullt att använda de anrika och praktiska uttrycken beroende och oberoende variabler.

I sambandet $\underline{s} = 4{,}91 \cdot \underline{t}^2$ anges normalt t̲ som den oberoende och s̲ som den beroende variabeln, och vidare sägs s̲ vara en funktion av t̲. Att s̲ är en funktion av t̲ innebär att fallsträckan i meter hos en fritt fallande kropp är bestämd av kroppens falltid i sekunder i den meningen att om t̲(o) = t̲(o') så s̲(o) = s̲(o'). Av detta följer att s̲ är en funktion av t̲ då och endast då det finns en funktion f från de positiva reella talen till de positiva reella talen sådan att

$$\underline{s} = f \circ \underline{t}.$$

Ofta skriver man istället för $\underline{s} = f \circ \underline{t}$ något oegentligt $\underline{s} = f(\underline{t})$. Det utmärkande för den oberoende variabeln, i detta fall t̲, är att dess värden är argument för f. Och det som karakteriserar den beroende variabeln, här s̲, är att dess värden är värden för f. Den beroende variabeln är alltså en funktion av den oberoende.

Likaväl som fallsträckan är bestämd av falltiden så är falltiden bestämd av fallsträckan. Därför kan man säga att falltiden är en funktion av fallsträckan och alltså fallsträckan den oberoende och falltiden den beroende variabeln. Att man ändock normalt inte säger så beror på den vanliga uppfattningen av orsaksförhållandet vid fritt fall. I vissa sammanhang vill man nog att "vara funktion av" och "vara orsak till" ska överensstämma vid kvantitativa samband. Men

Tarski har här, såvitt jag kan förstå, helt fel. Genom att begripa variabel som en form av tillordning, en idé som framför allt har lanserats av Karl Menger (se t ex Menger (1954) och (1959)), så är beroende och oberoende variabel samt funktionssamband mellan variabler begrepp som är "capalbe of logical criticism".

De variabler som hittills betraktats har varit reellvärda. Men det är inte nödvändigt att variabler antar tal som värden, även om det kanske är det vanligaste. Även variabler som antar storheter som värden används ofta. I detta fall är det speciellt lämpligt att tala om <u>variabla storheter</u>. Kroppslängd är t ex en variabel storhet. Dess värde för en viss person är en storhet, nämligen personens kroppslängd. På samma sätt är fallsträckan och falltiden (i båda fallen utan enhet) variabla storheter med längd- respektive tidsstorheter som värden.

Inte heller behöver variabler nödvändigtvis vara en-ställiga även om de som vi stött på så här långt har varit det. Det visar följande. Om en variabel storhet X med O som tilllämpningsområde antar extensiva storheter som värden så kan man definiera en variabel storhet ρ av att för o och o' i O ρ(o,o') antar X(o) : X(o') som värde. Identifierar man förhållandet mellan storheter med tal så är således ρ en tvåställig reellvärd variabel.

Det finns relationer mellan storheter som på ett naturligt sätt motsvarar relationen mellan variabla storheter. En sådan relation är proportionalitet. I avsnitt III återgavs definitionen av att fyra storheter är proportionella. Det är naturligt att säga att variabeln Y är proportionell mot variabeln X med samma tillämpningsområde O som Y om och endast om för alla o och o' i O
Y(o), Y(o'), X(o) och X(o') är proportionella. Y är alltså proportionell mot X om och endast om för alla o och o' i O

$$Y(o) : Y(o') = X(o) : X(o').$$

Om vi nu tänker oss att X och Y är reellvärda så är det lätt att visa (se Sjöstedt (1960) sid 29) att Y är proportionell mot X om och endast om Y = k·X där k är ett reellt tal. Ofta används denna ekvivalens som definition av proportionalitet mellan reellvärda variabla storheter.

Relationen "att vara en funktion av" mellan vaiabla storheter har också en naturlig motsvarighet i en relation mellan storheter, nämligen det kvantitativa del-helhetsbegreppet. Det kan inses på följande sätt. Låt X_1, X_2 och Y vara variabler med O som tillämpningsområde (men inte säkert med tal som värden) och sådana att Y är en funktion av X_1 och X_2. Det är ekvivalent med att för alla o och o' i O, om $X_1(o) = X_1(o')$ och $X_2(o) = X_2(o')$ så $Y(o) = Y(o')$. ("=" betyder här likhet). Y(o) kan därför uppfattas som en helhet med $X_1(o)$ och $X_2(o)$ som delar, och sådana att om lika delar byts mot lika delar så blir helheterna lika. Det kvantitativa del-helhetsbegreppet karakteriseras ibland just av att byte av delar mot likadana inte förändrar helheten. Med denna innebörd kan begreppet alltså knytas ihop med funktionsbegreppet, därigenom att Y är en funktion av X_1 och X_2 om och endast om för alla o i O är Y(o) en kvantitativ helhet med $X_1(o)$ och $X_2(o)$ som delar. I viss mening kan rent av begreppet funktionssamband ses som en generalisering till variabla storheter av det kvantitativa del-helhetsbegreppet tillämpat på storheter.

VI

En analytiska geometrin kan ses som en korsning mellan geometri och algebra. Till algebran räknas då generaliserad aritmetik, så aritmetiken är också en viktig del i hybridiseringen. Den analytiska geometrin har haft en betydelse som sträcker sig långt utöver vad som tillkommer den som en ny matematisk deldisciplin. Som ideal och inspiration har den påverkat flera olika områden. Den har också gett upphov till metoder och begrepp som visat sig användbara i sammanhang som inte (åtminstone som vi nu ser det) har med geometri att göra. En sådan produkt av den analytiska geometrin är variabelbegreppet. Redan tidigt kom det att användas för att formulera kvantitativa samband som inte var av geometriskt slag. Att man började använda variabler var ett viktigt steg i utvecklingen av det aritmetisk-algebraiska sättet att formulera kvantitativa samband. Den analytiska geometrin har därmed haft stor betydelse för hur vi anger dylika samband.

Det aritmetisk-algebraiska sättet att formulera kvantitativa samband innebär att de ses som funktionssamband mellan reellvärda variabler, vilka uttrycks med hjälp av formler. Den algebraiska karaktären får sambanden genom att de formuleras med hjälp av symboler och formler. Det aritmetriska inslaget ligger främst i att variablerna är reellvärda. En fråga som naturligen inställer sig här är hur man, utifrån det som omnämndes om proportionslärans aritmetisering i avsnitt IV, ska förstå vad det innebär att variablerna är reellvärda. Jag ska säga något om detta.

Det är lämpligt att börja med att se på de reellvärda variablernas uppbyggnad. Låt oss ånyo som exempel ta längden på fallsträckan i meter, $\underline{s}$, med tillämpningsområdet O av fritt fallande kroppar. $\underline{s}$(o) är alltså fallsträckan hos o i meter, dvs o:s fallsträcka är $\underline{s}$(o) meter. Uppenbarligen är $\underline{s}$(o) ett obenämnt tal, men i $\underline{s}$ ligger implicit en benämning av det. $\underline{s}$ är ju fallsträcka i meter, dvs fallsträcka uttrycks i måttet meter. Av det som sagts torde framgå att $\underline{s}$ kan uppfattas som sammansättningen av två tillordningar, nämligen måttet meter, m, och den variabla storheten längd på fallsträcka, S. Alltså gäller

$$\underline{s} = m \circ S.$$

Här uppfattar jag, som man brukar inom modern mätningsteori, ett mått som en taltillordning och m är således en tillordning av tal till längdstorheter och m(S(o)) är S(o):s längd i meter, dvs längden på o:s fallsträcka i meter.

Analogt med $\underline{s} = m \circ S$ kan man uppfatta falltiden i sekunder, $\underline{t}$, som $\sigma \circ T$, där T är den variabla storheten falltid och σ är måttet sekund. Lagen för fritt fall kan nu skrivas

$$m \circ S = k \cdot (\sigma \circ T)^2.$$

Ett kvantitativt samband

$$Y = f \circ \langle X_1, X_2 \rangle$$

är alltså på formen

$$N \circ \beta = f \circ \langle M_1 \circ \alpha_1, M_2 \circ \alpha_2 \rangle$$

där α_1, α_2 och β är variabla storheter samt M_1, M_2 och N är mått för det slags storheter som α_1, α_2 respektive β antar som värden.

Det finns naturligtvis mycket att säga om vad variabla storheter och mått är. Här ska jag nöja mig med att påpeka att en variabel storhet α med tillämpningsområdet O kan uppfattas som en aspekt på objekt i O, dvs en aspekt ur vilken man kan betrakta O:s element. Och α:s värde för o i O är resultatet av att betrakta o ur α, dvs vad som erhålls då man abstraherar från alla aspekter hos o utom α. Resultatet av att betrakta o ur α är alltså en storhet och den kan lämpligen kallas o:s α. Således är längden på fallsträckan "fallsträckelängd", en aspekt på kroppar i fritt fall och o:s fallsträckelängd är naturligtvis längden på o:s fallsträcka.

Av vad som sagts framgår att variablerna är reellvärda därigenom att man identifierar storheter med tal. Som framhölls i IV var det på det sättet som Descartes aritmetiserade proportionsläran. Närmare bestämt identifierade han storheter av ett visst slag med tal genom att välja en godtycklig storhet som enhet, vilken därmed identifierades med talet 1, och sedan identifiera en annan storhet a av samma slag med det tal r sådant att

$$a:e = r:1.$$

Det är väsentligen på det sättet man erhåller ett mått M för extensiva storheter av ett visst slag, dvs man väljer en storhet e till enhet, och därmed gäller M(e) = 1, och vidare bestämmer man M(a) som det tal sådant att

$$M(a):1 = a:e.$$

Det som skilde vad Descartes gjorde från det moderna mått-begreppet var att han inte använde tillordnings- eller avbildningsbegreppet. Detta begrepp kommer in i matematiken först i mitten på 1800-talet genom Dirichlet. Variabler som används för att uttrycka kvantitativa samband innehåller alltså i viss mening en sort (dvs referens till enhet) och variablernas värden är därför implicit benämnda tal. Det kan emellertid tyckas som om detta motsägs av exemplen i avsnitt I, eftersom endast i exempel (5) förekommer några referenser till enheter. I (4) t ex talas bara om falltiden och längden på fallsträckan och inget sägs om vilka enheter som används.

Men motsägelsen är bara skenbar. Man kan nämligen utelämna referenser till enheter utan att något missförstånd behöver uppstå. Det beror på en speciell egenskap hos kvantitativa samband inom fysiken, nämligen att de är dimensionsinvarianta. (I den följande definitionen och diskussionen av dimensionsinvarians har jag för enkelhets skull förutsatt att de variabla storheter som är inblandade är extensiva, dvs antar extensiva storheter som värden. Ett i viss utsträckning analogt resonemang kan genomföras för variabla storheter av annat slag.)

Sambandet

$$Y = fo \langle X_1, X_2 \rangle$$

är dimensionsinvariant om och endast om för alla positiva reella tal k_1, k_2 och n det finns ett positivt reellt tal c sådant att

$$n \cdot Y = c \cdot fo \langle k_1 \cdot X_1,\ k_2 \cdot X_2 \rangle .$$

Tanken bakom begreppet dimensionsinvarians är följande. Antag att

$$Y = fo \langle X_1,\ X_2 \rangle$$

är på formen

$$N \text{ o } \beta = fo \langle M_1 o \alpha_1\ ,\ M_2 o \alpha_2 \rangle \quad \text{och att}$$

om måtten N, M_1 och M_2 ersätts med andra mått N', M_1' och M_2' för respektive slag av storhet, så behöver f inte ändras med meränmultiplikation av ett positivt reelt tal c, dvs

$$N' o\ \beta = c \cdot fo \langle M_1' o \alpha_1,\ M_2' o \alpha_2 \rangle .$$

Byten av mått kan alltså kompenseras av att man multiplicerar f med ett positivt reellt tal. Man kan därför ange sambandet som

$$Y = C \cdot fo \langle X_1,\ X_2 \rangle$$

där C är beroende av de mått som ingår i X_1, X_2 och Y. Sambandets form ändras således inte när måtten ändras, utan man behöver bara ge C ett annat värde. Man kan därför säga att sambandet är invariant med avseende på substitution av mått, dvs det är måttinvariant. Ibland kallas mått också för dimension, och av tradition använder man oftare den termen i detta sammanhang. Oföränderlighet hos sambands form vid byten av mått brukar alltså kallas dimensionsinvarians.

Ett välkänt faktum från mätningsteorin är att mått för samma slag av extensiva storheter endast skiljer sig åt genom multiplikation av ett positivt reellt tal, dvs $M_1' = k_1 \cdot M_1$, $M_2' = k_2 \cdot M_2 = k_2 \cdot M_2$ och $N' = n \cdot N$, där k_1, k_2 och n är positiva tal. Byte av mått innebär alltså multiplikation med ett positivt tal. Kravet att

$$N' \circ \beta = c \cdot fo \langle M_1' \circ \alpha_1,\ M_2' \circ \alpha_2 \rangle$$

är alltså ekvivalent med

$$n \cdot N \circ \beta = c \cdot fo \langle k_1 \cdot M_1 \circ \alpha_1,\ k_2 \cdot M_2 \circ \alpha_2 \rangle$$

dvs

$$n \cdot Y = c \cdot fo \langle k_1 \cdot X_1,\ k_2 \cdot X_2 \rangle \ .$$

Och därvid är vi tillbaka till definitionen av dimensionsinvarians.

I samband på formen

$$Y = C \cdot fo \langle X_1,\ X_2 \rangle$$

där C är beroende av måtten som ingår i X_1, X_2 och Y, brukar C kallas för dimensionell konstant. Måtten som ingår i variablerna brukar då inte specificeras förrän tillsammans med ett talvärde för C; värdet på C fastställes ju relativt måtten i variablerna. Exemplen (3) och (4) är formulerade på detta sätt. Också (2) är det, men det framgår inte lika klart eftersom man brukar förutsätta att måtten för längd och volym väljs så att den dimensionella konstanten alltid är 1.

Dimensionsinvarians är en egenskap som i stort sett alla kvantitativa samband inom naturvetenskapen uppvisar. För att förstå hur det kan komma sig är det lämpligt att återvända till Newtons sätt att aritmetisera proportionsläran. Newton identifierar förhållanden mellan storheter, men däremot inte storheterna själva, med tal. För honom är det därför onaturligt att formulera kvantitativa samband som funktionssamband mellan variabler med den uppbyggnad som vi hittills betraktat.

Istället är en reellvärd variabel ρ_1, tvåställig och $\rho_1(a,b)$ innebär förhållandet mellan a och b i något avseende, dvs $\rho_1(a,b)$ är $\alpha_1(a) : \alpha_1(b)$ för någon aspekt α_1. Variablerna är alltså reellvärda därigenom att de antar förhållanden mellan storheter som värden, och dessa identifieras med tal. Kvantitativa samband uttrycks som funktionssamband mellan reellvärda variabler av detta slag. Med modern formalism kan alltså kvantitativa samband, som Newton tänkte sig dessa, skrivas på formen

$$\rho = fo\langle \rho_1, \rho_2 \rangle$$

vilket alltså innebär att för alla o och o' i tillämpningsområdet O för ρ_1, ρ_2 och ρ gäller

$$\rho(o,o') = f(\rho_1(o,o'), \rho_2(o,o')).$$

Om ρ innebär förhållandet mellan objekt med avseende på β medan ρ_1 och ρ_2 innebär förhållandet mellan objekt med avseende på α_1 respektive α_2, så är ovanstående ekvivalent med: För alla o och o' i O

$$\beta(o) : \beta(o') = f(\alpha_1(o):\alpha_1(o'), \alpha_2(o):\alpha_2(o')).$$

Newton formulerar alltså kvantitativa samband som funktionssamband mellan variabler som antar förhållanden mellan storheter som värden. Det är lätt att övergå från ett kvantitativt samband formulerat på detta sätt till ett kvantitativt samband formulerat på det sätt vi tidigare betraktade. Man väljer ett objekt $\underline{e}$ i O och låter $\alpha_1(\underline{e}), \alpha_2(\underline{e})$ och $\beta(\underline{e})$ vara enheter för måtten M_1, M_2 och N, som är mått för storheter av det slag som α_1, α_2 och β respektive antar som värden. Alltså gäller att $M_1(\alpha_1(\underline{e})) = 1$, $M_2(\alpha_2(\underline{e})) = 1$ och $N(\beta(\underline{e})) = 1$. Definiera X_1, X_2 och Y på följande sätt:
För alla o i O låt

$$Y(o) = \beta(o) : \beta(\underline{e})$$

$$X_1(o) = \alpha_1(o) : \alpha_1(\underline{e})$$

$$X_2(o) = \alpha_2(o) : \alpha_2(\underline{e})$$

Alltså gäller för alla o i O

$$Y(o) = f(X_1(o), X_2(o)).$$

Nu är

$$\beta(o) : \beta(\underline{e}) = N(\beta(o)) : 1$$

dvs $Y(o) = N(\beta(o))$ och därmed $Y = N \circ \beta$. På samma sätt visas att $X_1 = M_1 \circ \alpha_1$ och $X_2 = M_2 \circ \alpha_2$. Av detta följer

$$N \circ \beta = f \circ \langle M_1 \circ \alpha_1, M_2 \circ \alpha_2 \rangle .$$

Däremot gäller inte omvändningen. Ett funktionssamband på formen $N \circ \beta = f \circ \langle M_1 \circ \alpha_1, M_2 \circ \alpha_2 \rangle$ kan inte alltid skrivas på formen $\mathcal{f} = f \circ \langle \mathcal{f}_1, \mathcal{f}_2 \rangle$. Ett exempel på detta är

$$N \circ \beta = (M_1 \circ \alpha_1) + (M_2 \circ \alpha_2)$$

där de variabla storheterna α_1, α_2 och β antar storheter av olika slag som värden. Man kan emellertid visa att om och endast om ett kvantitativt samband

$$N \circ \beta = f \circ \langle M_1 \circ \alpha_1, M_2 \circ \alpha_2 \rangle$$

(där α_1, α_2 och β antar olika slags extensiva storheter som värden) är dimensionsinvariant så kan det skrivas på formen: För alla o och o' i tillämpningsområdet gäller

$$\beta(o) : \beta(o') = f(\alpha_1(o) : \alpha_1(o'), \alpha_2(o) : \alpha_2(o')).$$

Ett kvantitativt samband är alltså dimensionsinvariant om och endast om det uttrycker ett funktionssamband mellan variabler som antar förhållanden mellan storheter som värden.

Kvantitativa samband inom naturvetenskapen är, som tidigare påpekats, nästan undantagslöst dimensionsinvarianta, och uttrycker därmed funktionssamband mellan variabler som antar förhållanden mellan storheter av samma slag som värden. Men är de dimensionsinvarianta därför att de (till sin natur) är funktionssamband av detta slag? Eller är dimensionsinvarians snarare en egenskap hos vårt sätt att formulera kvantitativa samband? Har vi alltså valt (omedvetet) att enbart betrakta kvantitativa samband som implicerar funktionssamband mellan variabler vilka tar förhållanden som värden, men kunnat göra annorlunda? Den frågan är alldeles för omfattande för att gå in på här. Jag får nöja med med att uttrycka den förmodan att det är på det sistnämnda sättet. Och att som antytts proportionsläran spelar en viss roll för detta.

Det aritmetiska i vårt vanliga sätt att ange kvantitativa samband innebär alltså att de uttrycks som funktionssamband mellan reellvärda variabler, vilka var och en är sammansatta av ett mått och en variabel storhet. Att variablerna är uppbyggda på detta sätt är ur modern mätningsteoretisk synvinkel naturligt. Då vi anger mätningsresultat i form av mätvärden så uttrycker dessa nämligen en tillordning av tal till objekt och denna tillordning är väsentligen en del av ett mått; tillordnandet av tal uttrycks med hjälp av mått. Ett värde för en variabel är alltså ett möjligt mätvärde. Steget mellan mätning och kvantitativa samband är därför litet. Kvantitativa samband förbinder olika möjliga mätningar.

Jag har talat om det aritmetisk-algebraiska som det moderna sättet att formulera kvantitativa samband. Kanske håller det dock på att bli omodernt. Då man inom fysiken formulerar fältekvationer, använder tensorer o dyl, har man inte då sprängt ramen för det aritmetiska? Och ökar inte därmed avståndet mellan mätning och kvantitativa samband? Är man möjligen på väg tillbaka till ett mer geometriskt sätt att formulera kvantitativa samband? Men det är naturligtvis i så fall inte fråga om någon återgång till proportionsläran och till hur man gjorde i antiken. Utvecklingens cirkel sluter sig aldrig helt.

LITTERATURFÖRTECKNING

Encyclopaedia Britannica. 15:e upplagan, 1975.

Galilei, G., _Discorsi intorno a due nuove scienze_. 1638. Engelsk översättning: _Two New Sciences_. Translated, with Introduction and Notes, by Stillman Drake. London, 1974.

Kepler, J., _Harmonice mundi_. 1619. Tysk översättning: _Weltharmonik_. Übersetzt und eingeleitet von Max Caspar. München-Berlin, 1939.

Menger, K., On variables in mathematics and natural sciences. _Brit. J. Phil. Sci_, 1954, _5_, 134-142.

Menger, K., Mensuration and Other Mathematical Connections of Observable Material. I Churchman, C.W. and Ratoosh, P. (red) Measurement. Definitions and Theories. London, 1959.

Newton, I., Arithmetica Universalis. 1684. Översatt till engelska 1720 som "Universal Arithmetick" och i en utgåva från 1728 omtryckt i The Mathematical Works of Isaac Newton, Vol 2, New York, 1967.

Newton, I., Philosophiae naturalis principia mathematica. 1686. Engelsk översättning: The Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of the World. Translated into English by Andrew Motte in 1729. The translations revised, and supplied with an historical and explanatory appendix, by Florian Cajori. Tredje upplagan, Berkeley, 1947.

Sigma., En matematikens kulturhistoria sammanställd och kommenterad av James R. Newman. Stockholm, 1959.

Sjöstedt, C.E., Geometri för gymnasiet. Andra upplagan, Stockholm, 1960.

Strömer, M., De Sex Första jemte Elfte och Tolfte Böckerna af Euklidis Elementa. Sjätte upplagan, Örebro, 1828.

Tarski, A., Introduction to logic. Andra upplagan, New York, 1946.