NÅGRA FRAGMENT UR MÄTNINGSTEORINS HISTORIA
FRÅN HEDENHÖS TILL SUPPES

Jan Odelstad

I

I den första berättelsen i Heidenstams Svenskarna och deras hövdingar från 1910, som heter "Hövdingen med de oräkneliga stenyxorna", berättar Heidenstam om Ura-Kaipa och Karilas, vilka var samtida med Hedenhös. I en lottkastning förlorar Karilas och blir hövdingen Ura-Kaipas slav. Det visar sig emellertid att Karilas har för svaga armar för att tillverka stenyxor åt Ura-Kaipa, vilket är en av slavarnas viktigaste sysselsättningar. Ura-Kaipas rådgivare kräver då att Karilas ska genomgå det stora provet för att se om det är motiverat att låta honom leva. Heidenstam berättar:

> Nu släppte de arbetande sina verktyg, ty de mindes alltför väl, att det hade slutat illa för alla, som blivit dömda till det stora provet.
> "Också det begära ni av mig!" svarade Ura-Kaipa, där han stod i dörren. "Nåväl, Karilas, dina armar äro svaga och onyttiga. Varför skola vi då kläda och föda dig? Visa mig, om ditt förstånd är starkare än din kropp. Kan du mäta Ura-Kaipas rikedom, ja, då må du leva. Då har du lyckligt genomgått det stora provet. Kan du räkna Ura-Kaipas skatter? Kan du säga mig, hur många stenyxor, som hänga på hans boning?"
> Karilas gick raskt fram och plockade ned nio yxor och lade dem i en hög. Trälarna brusto i skratt. "Ja, så långt kunna vi alla räkna. Men sedan, sedan? Vart kommer du nu?"
> Karilas stod villrådig. Så tog han omigen ned nio yxor och lade dem i en ny hög.
> Trälarna och de äldsta skakade på huvudet och begrepo inte, vad han menade. Men han fortsatte att plocka ned yxorna och lade nio i var hög, ända till dess det blev nio högar. "Det må vara", ropade de äldsta, "men ännu hänger det yxor kvar på offerhuset."
> Karilas tog då ned de sista två yxorna och lade dem åt sidan för sig. Han dröjde litet och tvekade. Med ens klarnade gåtan för honom, och han utbrast glättigt: "Ura-Kaipa, du har nio gånger nio stenyxor och så två."
> Ett sorl av beundran hördes från trälarna, och Ura-

> Kaipa tecknade i luften med fingret en hammare, ljungeldens sinnebild. "Allt intill i dag ha Ura-Kaipas stenyxor ansetts oräkneliga", sade han, "men länge har jag märkt på denna gosse, att de gulskinande på andra sidan sjön ha höga gåvor, som äro förborgade för oss. Skada vore det att ta en sådan träls liv."

(Understrykningen av "mäta" och "räkna" har jag tillåtit mig att göra.)

Det kan tyckas märkligt att Karilas lägger yxorna i högar om nio och inte tio, som man kanske skulle ha väntat. Men Heidenstam ger en förklaring till detta:

> De kunde bara räkna till nio, det längsta som någon där i skogarna då kunde räkna till. Människorna där brukade räkna på fingrarna, men glömde tummen, som de räknade med.

I berättelsen om Ura-Kaipas stenyxor gestaltar Heidenstam den inte ovanliga idén att matematiken en gång på Hedenhös' tid växte fram som svar på vissa praktiska behov, och att behovet att kunna <u>mäta</u> var det viktigaste för matematikens tidigaste utvecklingsskede.

Den ursprungligaste formen av mätande bör rimligen ha varit <u>antalsmätning</u>, eller kanske bör man säga <u>antalsräkning</u>, som har att göra med frågeställningar om hur många, fler eller färre än osv. Och den positiva heltalsaritmetiken är naturligtvis den del av matematiken som närmast svarar mot detta behov, och var förmodligen den del av matematiken som först utvecklades.

Även behovet av de positiva rationella talen (bråken) uppstår på ett naturligt sätt i samband med mätning. Om käppen b är dubbelt så lång som käppen a medan käppen c är tre gånger så lång som a så är b:s längd två tredjedelar av c:s. Man kan kanske säga att medan de positiva hela talen är intimt förknippade med antalsräkning så hänger de positiva bråken nära samman med en mer utvecklad form av mätning. Idén om de rationella talen har gamla anor, om ej ända bort till Hedenhös.

Hur är det då med de irrationella talen? Svarar de också mot ett behov aktualiserat av mätning? Jag tror att svaret är ja, men förhållandet är lite mer komplicerat än då det gäller de hela talen och bråken. Det är nämligen lätt att se att de irrationella talen inte behövs för att ange resultatet av en praktiskt utförd mätning. På grund av den ofrånkomliga bristen på exakthet hos mätmetoder så behövs för detta ändamål aldrig annat än de rationella talen. Däremot skapar kalkylerandet med mätvärden och andra mer teoretiska överväganden i samband med mätning behov av de irrationella talen. Och det var något som stod klart redan i det antika Grekland och manifesterar sig i läran om kommensurabla och inkommensurabla storheter.

Två storheter a och b är kommensurabla om de har ett gemensamt mått, och därmed menas att det finns en storhet c sådan att a och b är multiplar (mångfalder) av c, dvs det finns hela tal m och n sådana att a är m-te multipeln av c och b är n-te multipeln av c. Om två storheter inte har ett gemensamt mått så är de inkommensurabla. Eftersom tal är storheter så kan begreppsparet kommensurabel/inkommensurabel tillämpas på talen. Talen x och y är alltså kommensurabla om det finns ett tal z sådant att $x = m \cdot z$ och $y = n \cdot z$ där m och n är hela tal. Två rationella tal är alltså alltid kommensurabla medan detta inte gäller två irrationella tal. Vidare är ett rationellt tal alltid kommensurabelt med 1, medan ett irrationellt tal aldrig är det. (I detta förhållande har för övrigt termerna "rationellt tal" och "irrationellt tal" sitt ursprung.)

Pythagoréerna fann redan på 400-talet f.Kr. att längden hos sidan och hos diagonalen i en kvadrat inte kan vara kommensurabla storheter. Sätter man sidans längd till 1 så finns det alltså inget rationellt tal som anger längden hos diagonalen. Detta innebär att $\sqrt{2}$ inte är ett rationellt tal. Upptäckten av de inkommensurabla storheterna ställde till skandal bland pythagoréerna och skakade deras världsbild. Pythagoréerna hade nämligen som valspråk: "Allt är tal". Med tal avsåg de hela positiva tal. Det innebar bl.a. att naturföreteelser ska kunna beskrivas i termer av de hela talen. Man tänkte sig att detta skulle kunna göras genom att förhållandet mellan två storheter alltid skulle anges som ett förhållande mellan hela tal. Resultatet av en jämförelse skulle alltid kunna formuleras som ett talförhållande. Och det ligger då nära till hands att möjligheten att göra en jämförelse blir beroende av detta. Ska man jämföra a och b så kan man ju göra detta genom att se på de talförhållanden som svarar mot förhållandet mellan a och c samt b och c. Men upptäckten av inkommensurabla storheter visade att detta inte var möjligt. Man fann förhållanden mellan storheter som inte kunde anges med ett talförhållande. Därmed hade deras grundläggande idé rasat samman. En tillfredsställande lösning på problemet erhölls inte förrän över hundra år senare genom Eudoxos´ proportionslära, vilken jag ska återkomma till.

Irrationella tal aktualiserades alltså t.ex. av teoretiska överväganden vid längdmätning inom geometrin. Och därför kan man ju säga att mätning, åtminstone indirekt, skapar behov av de irrationella talen. Speciellt eftersom geometrin själv har sina rötter i mätning; geometri betyder ju jordmätning.

Man tycks alltså kunna säga att systemet av positiva reella tal har sitt praktiska ursprung i mätning. Aleksandrov uttrycker detta genom att säga "the concept of a real number is the abstract image of the actual value of an arbitrary magnitude" (Aleksandrov et al [1962] sid 45).

II

Enligt denna snabbskiss av en vanlig syn på förhållandet mellan mätning och matematikens tillkomst, har mätning skapat ett behov och inspirerat framväxten av den elementära matematiken, t.ex. talsystemet och aritmetiken. Men matematiken anses inte på något logiskt sätt förbundet med mätning. Sambandet mellan mätning och matematik ses istället snarast som historiskt och psykologiskt.

Till grund för denna syn på mätningens roll för matematikens utveckling ligger en speciell syn på mätning och matematik överhuvud taget, och denna visar sig i den moderna mätningsteorin. Med <u>mätningsteori</u> brukar man numera avse de teoretiska aspekterna på mätning i allmänhet, dvs inte teorin för någon speciell mätmetods praktik. Som en viktig ingrediens i mätningsteorin hör t.ex. frågan om hur mätningsresultat ska formuleras och behandlas. Den moderna mätningsteorin innebär bl.a. följande:

1. De matematiska begreppen är, från logisk synpunkt, oberoende av sin uppkomst och användning vid mätning. Speciellt gäller att aritmetiken är, logiskt sett, helt självständig. Matematiken är alltså ingen del av mätningsteorin.
2. Genom mätning blir det möjligt att gå från det empiriska till det matematiska (aritmetik och analys), dvs mätning gör tillämpning av elementär matematik möjlig.
3. Mätning innebär, om man ser det abstrakt, att tal tillordnas företeelser som i de flesta fall är av empiriskt slag. Och därmed representeras en struktur hos empiriska företeelser med en talstruktur. Mätning innebär alltså en representation eller avbildning. Det man kallar ett mått, en enhet, en sort eller en skala utgör själva avbildningsfunktionen.

En dylik uppfattning av mätning som en representation av något empiriskt med något matematiskt, som är oberoende av det empiriska har alltså inte alltid varit rådande. När Karilas hade lyckats med att mäta Ura-Kaipas rikedom genom att "utvidga talsystemet", så såg han säkert inte talen som något självständigt, oberoende av mätningsförfarandet. På Hedenhös tid var den då kända aritmetiken inte oberoende av mätning utan gällde hur mätningsresultatet skulle anges och behandlas. Matematiken var en del av mätningsteorin.

Framväxten av den moderna mätningsteorin har skett stegvis och jag ska försöka skissera vissa fragment i denna utveckling.

III

Bok V i Euklides <u>Elementa</u> ägnas åt den av Eudoxos (c 408-355 f.Kr.) skapade proportionsläran. Eftersom denna i hög grad tycks fylla funktionen av mätningsteori i såväl antiken som långt fram i tiden, ska jag försöka skissera något av innehållet i denna bok.

Euklides framställning av proportionsläran börjar med 18 definitioner. De 7 första lyder i Witts svenska översättning från 1849 på följande sätt:

1. En mindre storhet kallas part utaf en större storhet, om den mindre mäter den större: det är, innehålles jemnt uti henne, så att ingen del blifver öfver.
2. En större storhet kallas mångfaldig af den mindre, om den mindre mäter den större.
3. Proportion kallas det förhållande, som är emellan tvenne storheter af samma slag, i anseende till deras quantitet.
4. De storheter säges vara af samma slag, och kunna således hafva proportion till hvarandra, om hvilka man kan begripa, att den ena kan tagas så många gånger, att hon blifver större än den andra.
5. Storheter sägas vara i samma proportion, den första till den andra och den tredje till den fjerde, om den förstas och den tredjes lika mångfaldiga, jemförda med den andras och fjerdes lika mångfaldiga, ehuru mångfaldiga de än må vara, äro både tillika större, lika stora eller mindre än de lika mångfaldiga af den andra och fjerde, om de jemföras, som svara emot hvarandra.
6. De storheter, som äro i samma proportion, sägas vara proportionela.
7. När den förstas mångfaldige är större, än den andras; men den tredjes icke större, än den fjerdes, så säges den första hafva till den andra en större proportion, än den tredje till den fjerde.

I samband med Bok V kan det vara på sin plats att påminna om de tre första av Euklides fem axiom. De kan på svenska formuleras t.ex. på följande sätt:

1. De, som är lika stora med ett och samma, är sinsemellan lika stora.

2. Om man lägger lika stora till lika stora, så blir summorna lika stora.

3. Om man tar lika stora från lika stora, så blir återstoderna lika stora.

Euklides använder sig av dessa axiom i bevisen för sina satser. För Bok V spelar de också stor roll vid formulerandet av definitionerna. Axiomen gäller nämligen för storheter och anger egenskaper hos dessa som är nödvändiga för att proportionsläran ska kunna formuleras.

Av axiomen framgår att Euklides tänker sig att det är möjligt för storheter att vara lika, att adderas till varandra och att subtraheras från varandra. Självklart är inte alla storheter lika och rimligen kan inte alla storheter adderas till varandra eller subtraheras från varandra. Det är inte heller alltid meningsfullt att fråga sig om två storheter är lika. Storheter kan nämligen vara av olika slag, som framgår av definition 3 i Bok V. Förmodligen tänker sig Euklides att man för storheter av samma slag meningsfullt kan ifrågasätta om de är lika eller inte, och vidare kan storheter av samma slag adderas och eventuellt subtraheras. Av definition 4 framgår nämligen att två storheter är av samma slag om den ena storheten kan tas så många gånger att den blir större än den andra, dvs det finns en multipel av den ena storheten som är större än den andra. n-te multipeln av storheten a är n st a adderade, som skrivs $n \cdot a$. a och b är alltså storheter av samma slag om det finns n och m sådana att $n \cdot a > b$ och $m \cdot b > a$, där $>$ används för att beteckna "större än". (Att två storheter a och b är lika skrivs i fortsättningen $a = b$.)

Förhållandet mellan storheterna a och b av samma slag brukar betecknas

$$a : b \quad \text{eller} \quad [a : b] .$$

Att storheterna a, b, c och d har samma förhållande (den första till den andra och den tredje till den fjärde) kan alltså också uttryckas genom att säga att a, b, c och d är proportionella. Det brukar ofta skrivas

$$a : b = c : d .$$

Enligt definition 5 gäller alltså att

$$a : b = c : d$$

om och endast om för alla positiva hela tal m och n:

$$m \cdot a > n \cdot b \;\;\&\;\; m \cdot c > n \cdot d \quad \text{eller}$$
$$m \cdot a = n \cdot b \;\;\&\;\; m \cdot c = n \cdot d \quad \text{eller}$$
$$m \cdot a < n \cdot b \;\;\&\;\; m \cdot c < n \cdot d.$$

Definition 7 anger vad det innebär att förhållandet mellan a och b är större än förhållandet mellan c och d, dvs att a har till b en större proportion än c har till d.

Storheterna i ett förhållande måste vara av samma slag. I a : b måste alltså a och b vara av samma slag. Men man kan jämföra förhållandena a : b och c : d med varandra utan att a, b, c och d är av samma slag. Är a och b två längdstorheter och c och d två tal så är det meningsfullt att fråga om a : b = c : d. Genom proportionsläran har man alltså uppnått att man kan relatera förhållanden mellan storheter av ett slag till förhållanden mellan storheter av ett annat slag.

I Elementa används proportionsläran bl.a. för att formulera och bevisa geometriska satser. Följande exempel visar detta:
Sats 1 i Bok VI lyder:

> Trianglar och parallellogram, som har samma höjd, förhåller sig till varandra som deras baser.

Sats 2 i Bok XII lyder:

> Cirklar förhåller sig till varandra som kvadraterna på deras diametrar.

IV

Vad ville man då uppnå genom proportionsläran? Ett av de viktigaste syftena var att komma till rätta med de inkommensurabla storheterna. Och det var något man också uppnådde.

I den grekiska matematiken betydde "tal" vad vi idag skulle kalla "positiva hela tal". Detta visar sig bl.a. i Bok VII av Elementa där Euklides formulerar sin talteori. De två första definitionerna i denna bok lyder på följande sätt i engelsk översättning (Heath [1956]):

> 1. An unit is that by virtue of which each of the things that exist is called one.
> 2. A number is a multitude composed of units.

Redan före Eudoxos hade de grekiska matematikerna alltså klart för sig att förhållanden mellan kommensurabla storheter kunde uttryckas som ett förhållande mellan tal (i betydelsen positiva hela tal), men att det inte var möjligt med förhållanden mellan inkommensurabla storheter. (I Euklides Elementa är detta för övrigt formulerat som sats 5 respektive 7 i Bok X.) Proportionsläran visade att det var möjligt att jämföra två godtyckliga förhållanden, dvs givet två förhållanden a : b och c : d så gäller att antingen är a : b större än, lika med eller mindre än c : d. Om a och b är inkommensurabla storheter av samma slag så kan man jämföra a : b med varje förhållande mellan (positiva hela) tal. Det innebär att även om man inte kan uttrycka förhållandet mellan två inkommensurabla storheter med ett förhållande mellan tal, så kan man ange ett talförhållande som "kommer hur nära man vill" förhållandet mellan de inkommensurabla storheterna.

Proportionsläran gjorde det alltså möjligt att handskas med de inkommensurabla storheterna, trots att man inte kunde uttrycka förhållandet mellan två inkommensurabla storheter med ett förhållande mellan tal. Och därmed hade man ju löst problemet med de inkommensurabla storheterna.

I definition 5 i Bok V av Elementa kommer man mycket nära Dedekinds definition av de reella talen såsom ett snitt i mängden av rationella tal, något som Dedekind själv har påpekat. Det har spekulerats över (Hall [1970] sid 35) varför inte Eudoxos själv eller någon av hans elever tog steget fullt ut och konstruerade de irrationella talen. Ett av skälen till att så inte skedde kan vara, att man helt enkelt inte hade något behov av de irrationella talen, utan att proportionsläran löste deras problem med de inkommensurabla storheterna. Ett annat skäl kan, som påpekas i Hall [1970], vara att detta skulle ha lett fram till att betrakta aktuella oändligheter, vilket man fann högst motbjudande.

Så till frågan om proportionsläran som mätningsteori. Från modern utgångspunkt är proportionsläran främst en mätningsteori därigenom att den anger hur man relaterar icke-matematiska objekt till matematiska objekt, nämligen positiva hela tal, och alltså gör det möjligt att övergå från det empiriska till det matematiska. Men även på annat sätt spelar själva proportionsläran rollen av mätingsteori. Som framhålls i Stenlund [1980](sid 164), så innebar mätning i antiken en jämförelse med en standard, varmed närmast avses en standardiserad jäförelse. Proportionsläran kan då ses som teorin för hur man anger resultatet av gjorda mätningar, som är en viktig del av mätningsteorin. Av matematik i vår mening förutsätts inte mer än den positiva heltalsaritmetiken. Bråken uttrycks ju som förhållanden mellan hela tal, dvs i termer av proportionsläran själv. Och de irrationella talen används överhuvud taget inte.

Då proportionsläran skapades rådde alltså ett nära förhållande mellan matematiken och de teoretiska sidorna av mätning. Med matematik menades vid denna tid just läran om det kvantitativa. Det som då svarade mot vad vi idag tänker på som elementär matematik var i hög grad en del av det teoretiska studiet av mätning.

En speciell egenskap hos proportionsläran är att den gör det obehövligt att använda enheter (i betydelsen sorter) för att formulera mätningsresultat, eftersom man hela tiden ser på förhållandet mellan storheter av samma slag. Benämnda tal förekommer därför inte i Elementa.

Proportionsläran kom att utöva ett omfattande inflytande under lång tid. Dess funktion kom dock att förändras med tiden.

V

I sin skrift Universal Arithmetick har Newton tagit ett viktigt steg bort från Eudoxos´ proportionslära uppfattad som mätningsteori, därigenom att han ser annorlunda på vad som är tal. Newton säger nämligen:

> By Number we understand not so much a Multitude of Unities, as the abstracted Ratio of any Quantity, to another Quantity of the same kind, which we take for Unity. And this is threefold; integer, fracted and surd: An Integer is what is measured by Unity, a Fraction, that which a submultiple Part of Unity measures, and a Surd, to which Unity is incommensurable.

(Det tycks uppenbart att Newton här anspelar på Euklides definition 1 och 2 i Bok VII, som citeras i avsnitt IV.)

Den tyske matematikern Hölder kommenterar detta på följande sätt (Hölder [1901] sid 18):

> Die moderne Auffassung der Proportionenlehre beruht auf einem Gedanken, den in präciser Form zuerst Newton ausgesprochen hat, dass nämlich das Verhältniss einer Grösse zu einer anderen von derselben Art, welche letztere als Einheit aufgefasst werden soll, durch eine abstracte

> (d.h. reelle, positive) Zahl ausgedrückt wird. Bei dieser auffassung verhält sich die Grösse a zu b dann wie c zu d, wenn a durch b gemessen dieselbe Zahl ergiebt wie c, falls dieses durch d gemessen wird.

För Newton var alltså ett tal det abstrakta förhållandet mellan storheter och talen var alltså logiskt sett intimt förknippade med mätning. Detta är en tanke som Dedekind med kraft vänder sig mot (Dedekind [1872]):

> For, the way in which the irrational numbers are usually introduced is based directly upon the conception of extensive magnitudes - which itself is nowhere carefully defined - and explains number as the result of measuring such a magnitude by another of the same kind. Instead of this I demand that arithmetic shall be developed out of itself.

Dedekinds, och andras, arbete med att definiera de reella talen på ett rent matematiskt sätt ledde till att aritmetiken kom att ses helt oberoende av mätning. Det var alltså ett viktigt steg på väg mot den moderna mätningsteorin liksom mot den moderna synen på matematiken som ren matematik.

Ett annat viktigt steg togs av Hölder i den tidigare citerade uppsatsen från 1901. Hölder bygger vidare på såväl Newtons idé om att förhållandet mellan två storheter av samma slag kan uttryckas som ett positivt reellt tal som Dedekinds idé att "Arithmetic shall be developed out of itself". Hölder sätter sig nämligen före att i form av axiom ange egenskaper för storheter som gör det möjligt att visa att till varje förhållande mellan två storheter hör ett positivt reellt tal. Att i axiomatisk form ange storheters egenskaper har gamla anor. Redan Euklides gjorde ju detta. Hölder presenterar fler och andra axiom än Euklides, men det tycks klart att Euklides ande svävar över Hölders axiomatisering. Man kan kanske säga att Hölder fullföljer en idé som finns implicit hos Euklides, nämligen att det finns en struktur på storheter av samma slag, och denna kan anges axiomatiskt.

Som ett viktigt inslag i Hölders tankegång ligger tillordnings- eller avbildningsidén, - speciellt idén om funktion såsom tillordning eller avbildning, vilken först formulerades av Dirichlet i början av 1800-talet. Att till varje förhållande mellan storheter hör ett reellt tal innebär ju en tillordning av ett reellt tal till varje förhållande. Däremot tycks Hölder inte tänka sig att tal tillordnas till storheterna själva. Idén att den struktur storheterna bildar ska representeras med en numerisk struktur finns inte explicit hos honom. Den idén finns emellertid klart formuleras i Huntington [1902], samt i Russell [1903]. Russell skriver t.ex.:

> Measurement of magnitudes is, in its most general sense, any method by which a unique and reciprocal correspondence is established between all or some of the magnitudes of a kind and all or some of the numbers, integral, rational, or real, as the case may be.

Och därvid är man i stort framme vid vad jag här har kallat den moderna mätningsteorin, som alltså ser mätning som en tillordning av tal till empiriska företeelser, så att strukturen på de senare representeras med en talstruktur.

Under de senaste decennierna har utvecklingen tagit ännu ett steg därigenom att denna syn på mätning klätts i mängdteorins och den logiska modellteorins dräkt. Den person som är mest förknippad med denna utveckling är Patrick Suppes. Uppfattningen av mätning som en representation innebär alltså att strukturer över storheter av samma slag representeras med en talstruktur genom att storheterna tillordnas tal. Ytterst kortfattat kan man beskriva Suppes grundläggande idé om mätning på följande sätt: Det strukturbegrepp som används i mätningsteorin är det mängdteoretiska strukturbegreppet och det representationsbegrepp som används är det mängdteoretiska funktionsbegreppet.

Om det som ska representeras uppfattas som mängdteoretiska strukturer så är steget inte långt till att se dem som modeller, eftersom en mängdteoretisk struktur kan ses som en modell. Man kan alltså använda den logiska modellteorin i samband med mätning.

Därmed är, kan man säga, förvandlingen i det närmaste fullbordad. Från att på Hedenhös tid matematiken har varit en del av det teoretiska studiet av mätning så blir, med Suppes´ mängd- och modellteoretiska formulering av mätningsteorin, det teoretiska studiet av mätning närmast en del av den av mätning oberoende matematiken. Mätningsteorin blir en gren av den rena matematiken.

Hur ska man då bedöma detta? Är det en utveckling av godo? Den frågeställningen är alldeles för omfattande att ta upp här. Det tycks mig i alla fall inte uppenbart att svaret på den senare frågan är ett obetingat ja.

Litteraturförteckning

ALEKSANDROV, A.D., KOLMOGOROV, A.N. & LAVRENT´EV, M.A. (red). Mathmatics: Its Content, Methods and Meaning. Providence, Rhode Island, 1962.

DEDEKIND, R. Stetigkeit und irrationale Zahlen. Brunswick, 1872. Översatt till engelska 1901 som "Continuity and irrational numbers" och omtryckt i Dedekind: Essays on the Theory of Numbers. New York, 1963.

HALL, T. Matematikens utveckling. Lund, 1970.

HEATH, T.L. The thirteen Books of Euclid´s Elements. New York, 1956.

von HEIDENSTAM, V. Svenskarna och deras hövdingar. Stockholm, 1910.

HUNTINGTON, E.V. A complete set of postulates for the theory of absolute continuous magnitude. Trans. Amer. Math. Soc., 1902, 3, 264-279.

HÖLDER, O. Die axiome der Quantität und die Lehre vom Mass. Ber. Verh. Kgl. Sächsis. Ges. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Classe, 1901, 53, 1-64.

NEWTON, I. Arithmetica Universalis. 1684. Översatt till engelska 1720 som "Universal Arithmetick" och i en utgåva från 1728 omtryckt i The Mathmatical Works of Isaac Newton, Vol 2, New York, 1967.

RUSSELL, B. The Principles of Mathmatics. London, 1903.

STENLUND, S. Det osägbara. Stockholm, 1980.

WITT, H.A. Femte boken af Euclidis Elementa Geometriae med förklaringar och tillägg. Lund, 1849.