Mikael Cronhjort & Maria Hagemann-Jensen

Avstånd med olika metriker

Författarna beskriver en lektion om avståndsberäkningar med olika metriker som de tror att kan vara inspirerande både för elever och matematiklärare på gymnasiet. Lektionen utvecklades i ett samarbete mellan fem lärare under Kleindagarna i januari 2020.

Många är välbekanta med det euklidiska avståndsbegreppet och Pythagoras sats, men i den lektion som vi presenterar här används även andra metriker med vilka man kan definiera och beräkna avstånd på andra sätt. Lektionen utvecklades under Kleindagarna i januari 2020, med utgångspunkt i en föreläsning av matematikprofessorn och forskaren Wojciech Chachólski som arbetar på KTH. Han förklarade hur olika avståndsberäkningar kan visa strukturer i större datamängder, vilket kan användas inom olika områden som ansikts-igenkänning och medicinsk forskning. Wojciech själv är verksam i det senare området.

Institut Mittag-Leffler i Djursholm.

Av de tjugo deltagande matematiklärarna i denna omgång av Kleindagarna var vi fem som valde att utveckla en lektion kopplad till föreläsningen om avståndsberäkningar. Vi fördjupade oss i ämnet och började tillsammans planera en lektion för elever på gymnasienivå. Tanken var dels att många skulle tycka att lektionen var intressant, dels att den skulle fungera som inspiration till gymnasiearbeten inom matematik, eller till vidare studier i matematik. Vi blev inte klara med utvecklingen innan det var dags att skiljas åt, men vi fortsatte under hela vårterminen att tillsammans planera denna lektion. Vi delade upp arbetet sinsemellan och samlade strax efter påsklovet ihop allt material till en lektion. Då hade förutsättningarna för genomförandet förändrats, eftersom all gymnasieundervisning bedrevs på distans på grund av coronarestriktioner.

Utveckling av lektionen

Då vi utvecklade lektionen utgick vi ifrån den allmänna avståndsformeln

$$d_p(v,\ w) = \left(|v_x - w_x|^{\,p} + |v_y - w_y|^{\,p}\right)^{1/p} \qquad (*)$$

där d är avståndet mellan punkterna $v = (v_x,\ v_y)$ och $w = (w_x,\ w_y)$ i ett tvådimensionellt rum. Parametern p som kan anta ett godtyckligt positivt värde gör formeln allmän. Eleverna är sedan tidigare bekanta med formeln i specialfallet då $p = 2$, vilket ger det euklidiska avståndet. Genom lektionen introducerar vi avståndsberäkningar med $p = 1$, vilket kallas City Block-avstånd, och med $p \to \infty$, vilket kallas Tjebysjov-avstånd.

De lektioner som utvecklas under Kleindagarna brukar bygga på en pedagogisk modell som kallas för 5E och används framför allt inom matematik, naturvetenskap och teknik. Modellen utvecklades 1987 av organisationen BSCS i USA, där man på grund av kalla kriget hade kommit fram till att man behövde satsa mer på att utveckla undervisningen för att kunna hävda sig mot Sovjetunionen. 5E syftar på fem olika moment som enligt modellen ska finnas i en lektion: *engage*, *explore*, *explain*, *elaborate* och *evaluate*.

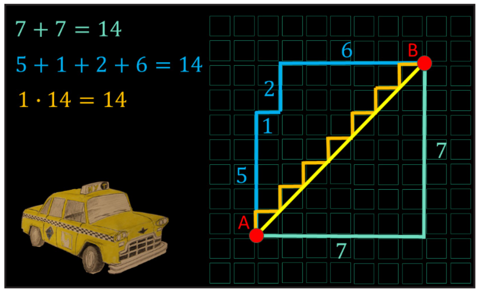
- Engage – man inleder lektionen med att försöka väcka intresse och skapa ett engagemang hos eleverna.
- Explore – genom att utforska och söka efter mönster och samband fortsätter man stimulera elevernas nyfikenhet och intresse.
- Explain – matematiken får rollen som ett verktyg för att förklara eller beskriva verkligheten.
- Elaborate – man visar för eleverna att det finns liknande saker som man kan göra, att det finns en möjlig fortsättning.
- Evaluate – genom att utvärdera kan man synliggöra vad eleverna har lärt sig, för både läraren och dem själva.

Lektionens genomförande

Lektionen är indelad i modellens fem moment. Den genomfördes på distans via Teams av Maria Hagemann-Jensen i en av hennes klasser i Matematik 4 på Sundsgymnasiet i slutet av vårterminen efter det nationella provet.

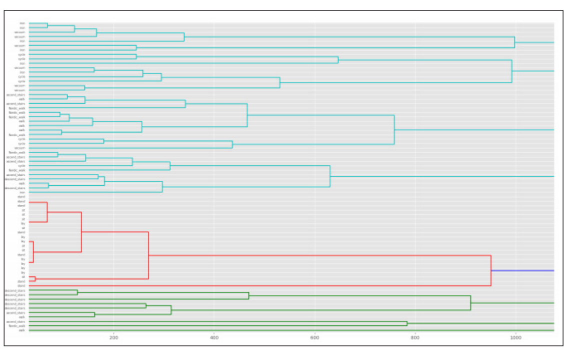
1. Engage

Lektionen inleddes med en PowerPoint-presentation som var tänkt att få eleverna intresserade av området avståndsberäkningar. Maria visade bilderna och förklarade. Först presenterade hon vanliga euklidiska avståndsberäkningar som redan är kända av eleverna. Därefter visades hur andra metriker, City Block och Tjebysjov, är uppbyggda jämfört med en euklidisk metrik och hur man beräknar avstånd med dem. City Block har fått sitt namn utifrån att denna metrik beskriver det avstånd som en bil behöver köra om den bara kan röra sig längs med ett rutnät i en stadskärna med fyrkantiga kvarter. Då blir avståndet mellan två punkter lika långt, nämligen $\Delta x + \Delta y$, oavsett om man svänger i varje korsning eller om man först gör hela förflyttningen i ena riktningen, Δx, och sedan hela förflyttningen i andra riktningen, Δy. Se figur 1 som visar att avståndet som en bil behöver köra kan vara lika stort trots att den tar olika vägar, så länge den bara kan köra längs med ett rutnät. City Block-avståndet är större än det ljusgula euklidiska avståndet mellan A och B.



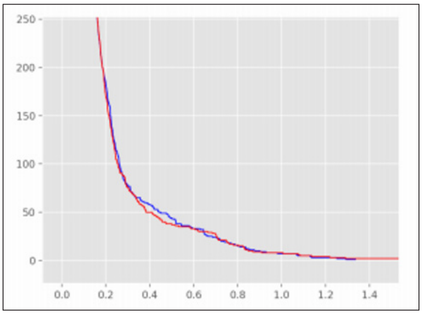
Figur 1. Illustration av City Block-avståndet.

Presentationen fortsatte med en mycket spännande del om hur andra metriker används inom modern medicinsk forskning. I korthet förklarades att statistik inte alltid räcker till för att tolka stora datamängder. Andra metoder behövs för att analysera och bearbeta data. Med en metrik kan man jämföra avstånd. För genetiskt material som dna kan skillnaden mellan två dna-sekvenser tolkas som ett avstånd. Om det finns två sekvenser som skiljer sig på bara en enda punkt så kan man säga att avståndet mellan dem är ett, och på ju fler ställen sekvenserna skiljer sig åt desto större är avståndet mellan dem. Detta är relativt lätt att tillämpa så länge som skillnaderna mellan sekvenserna är små, men det blir mer komplicerat om skillnaderna är stora. Skillnader mellan dna-sekvenser kan dessutom vara av olika slag. Skillnaderna handlar oftast om att en bas i dna-sekvensen har bytts ut mot en annan bas, men det kan också handla om att en sekvens har fler eller färre baser än en annan sekvens. Då det finns många mätpunkter och man ska beräkna alla inbördes avstånd mellan generna i ett omfattande genetiskt material är det en fördel att använda det avståndsmått som gör avståndsberäkningen så enkel som möjligt, utan att man tappar intressant information. Dessa beräkningar kan sedan sammanställas i *dendrogram*, se figur 2, och visualiseras genom *stable rank*, se figur 3, för att exempelvis inom medicinsk forskning lättare kunna upptäcka skillnader i dna hos en frisk och en sjuk person. Denna procedur upprepas kanske hundra gånger och man beräknar sedan ett medelvärde.



Figur 2. Dendrogram som visar avståndet mellan olika punktmängder. Punktmängderna eller klustren representerar en dna-sekvens och visas på var sin rad i dendrogrammet. Avståndet mellan två punktmängder kan avläsas utifrån var två grenar blir till en i dendrogrammet.

Figur 3: Stable rank visar antalet kluster som funktion av avståndet. Först är det många kluster och till sist bara ett. Den blå kurvan visar fördelningen av avstånden i dna hos en frisk person och den röda kurvan hos en sjuk person.



2. Explore

Efter genomgången var det dags för eleverna själva att prova på att räkna enligt de olika metrikerna. Detta moment tog cirka 25 minuter. Eleverna delades in i grupper om tre, där varje grupp fick sig tilldelat några x-värden. Till dessa fick de i uppgift att med euklidisk avståndsberäkning få fram tillhörande y-värden till enhetscirkeln i ett delat kalkylark. När de förde in sina y-värden i kalkylarket flyttade sig punkterna i det tillhörande koordinatsystemet, så att hela elevgruppen kunde se hur en cirkel växte fram. Därefter fick de i uppgift att utföra beräkningarna med City Block. Då visualiserades hur enhetscirkeln såg ut med dessa beräkningar.

Som exempel kan vi visa en avståndsberäkning för en elevgrupp som blev tilldelade x-värdet -0,7 och skulle hitta motsvarande y-värde i City Block-metrik ($p = 1$) för enhetscirkeln. Efter insättning av de givna parametrarna i den allmänna avståndsformeln ($*$) kom beräkningen att se ut så här:

$$1 = \left(|-0{,}7 - 0|^1 + |v_y - 0|^1 \right)^{1/1}$$

$$1 = |-0{,}7| + |v_y|$$

$$|v_y| = 0{,}3$$

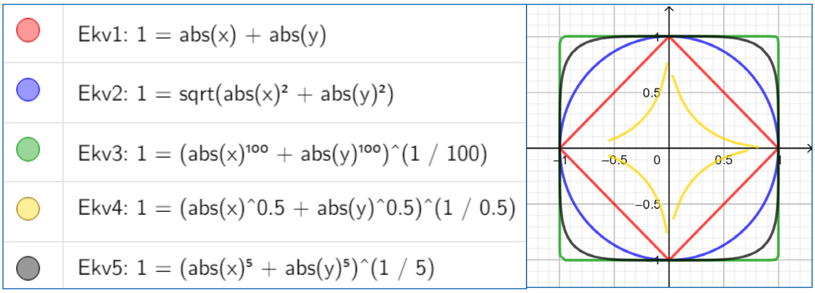
$$v_y = \pm 0{,}3$$

Alltså kommer koordinaterna (-0,7; 0,3) och (-0,7; -0,3) att tillhöra enhetscirkeln i metriken City Block.

3. Explain

När beräkningarna var klara betraktade klassen gemensamt resultatet och observerade hur enhetscirkeln såg ut med de två olika beräkningsmodellerna. Detta moment tog cirka 10 minuter. En kort diskussion följde om vad en enhetscirkel egentligen är. En grupp fick presentera sin lösning. Någon grupp som inte hade kommit fram till en korrekt lösning fick hjälp av klassen att identifiera var de hade tänkt fel. Aktiviteten sammanfattades i korthet och Maria förklarade att båda dessa visualiseringar är cirklar, men med olika sätt att mäta avstånd.

Därefter använde hon Geogebra för att visa hur enhetscirkeln ser ut med andra avståndsberäkningar. Utifrån den allmänna avståndsformeln ($*$) och $p > 0$ visades beräkningar och visualiseringar också för $p \to \infty$, vilket även kallas Tjebysjov avstånd, och för $p = 0{,}5$ och $p = 5$ för att ge fler exempel på hur enhetscirkelns form kan se ut för andra värden på parametern p.



Figur 4. Enhetscirkeln visas med olika metriker i Geogebra:
Röd kurva med City Block-metrik ($p = 1$).
Blå kurva med Euklidisk metrik ($p = 2$).
Grön kurva med Tjebysjov-metrik (här en uppskattning för $p = 100$).
Gul kurva med avståndsformeln då $p = 0{,}5$.
Svart kurva med avståndsformeln då $p = 5$.

4. Elaborate

För att visa att det finns fler liknande saker man kan göra lät Maria eleverna undersöka en parabel med olika avståndsberäkningar. En parabel utgörs av de punkter vars avstånd till en given punkt (brännpunkten) och till en given linje (styrlinjen) är lika. Varje grupp tilldelades återigen några x-värden. Till dessa fick de i uppgift att med euklidiska avstånd beräkna tillhörande y-värden för en parabel med given brännpunkt och styrlinje. När de förde in sina y-värden i kalkylarket flyttade sig punkterna i det tillhörande koordinatsystemet, så att hela elevgruppen kunde se hur en parabel växte fram. Därefter fick de i uppgift att utföra beräkningarna med City Block och då visualiserades hur parabeln såg ut med dessa beräkningar. Tidsåtgången för denna del var cirka 15 minuter.

5. Evaluate

Ytterligare en uppgift gavs för att synliggöra om elevgrupperna nu fått grepp om de olika avståndsberäkningarna. Denna gången handlade uppgiften om en ellips med givna brännpunkter. Den skulle lösas i Geogebra med olika metriker, se figur 5. Maria stämde av i var och en av grupperna och resultatet visades.

En avslutande PowerPoint-presentation visades för eleverna som bonusmaterial med information om Institut Mittag-Leffler och om vidare matematikstudier med syftet att inspirera till fortsatta studier och kanske senare forskning inom matematik.

Eleverna fick utvärdera lektionen och nästan alla uttryckte att lektionen var intressant. De uttryckte att lektionen var rolig och bra samt att det var intressant att se hur matematik används för att förbättra bland annat sjukvård och medicin. Det tyckte också att aktiviteterna hade en bra svårighetsgrad. Vi tror att de uppskattade att få uppleva ett nytt område inom matematiken samt att deras beräkningar med de olika metrikerna ledde fram till tydliga och konkreta visualiseringar av de för dem kända geometriska begreppen cirkel, parabel och ellips. Med denna lektion fick de en djupare förståelse för dessa fundamentala begrepp.

Ekv1: $3 = \text{abs}(x) + \text{abs}(y) + \text{abs}(x - 2) + \text{abs}(y)$

Ekv2: $3 = \text{sqrt}(\text{abs}(x)^2 + \text{abs}(y)^2) + \text{sqrt}(\text{abs}(x - 2)^2 + \text{abs}(y)^2)$

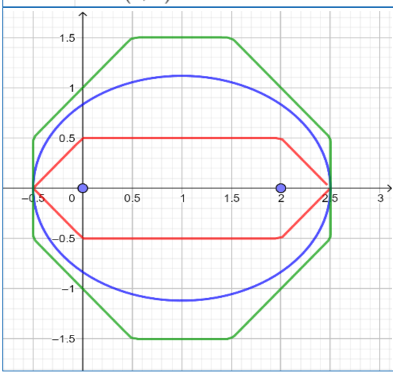
Ekv3: $3 = (\text{abs}(x)^{100} + \text{abs}(y)^{100})\hat{}(1 / 100) + (\text{abs}(x - 2)^{100} + \text{abs}(y)^{100})\hat{}(1 / 100)$

A = Skärning(xAxeln, yAxeln)

→ (0, 0)

B = Punkt(xAxeln)

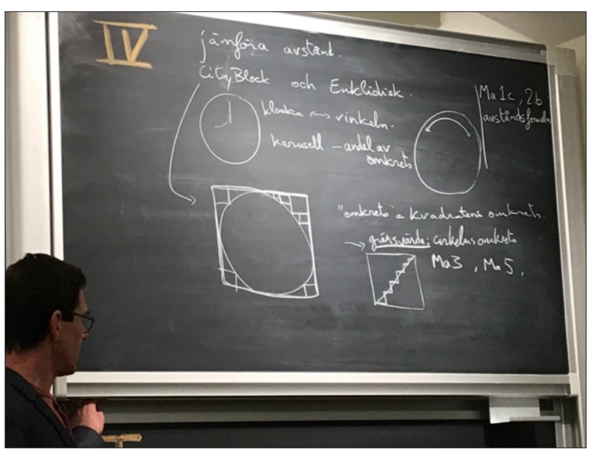
→ (2, 0)



Figur 5. Ellips i Geogebra med brännpunkterna (0,0) och (2,0) med olika metriker där summan av avståndet mellan en punkt på ellipsen och de båda brännpunkterna ska vara 3.
Röd kurva med City Block (p = 1).
Blå kurva med euklidisk metrik (p = 2).
Grön kurva med Tjebysjov-metrik (här en uppskattning för p = 100).

Kleindagarna och Felix Klein

Kleindagarna utgör en mötesplats för gymnasielärare och universitetslärare i Sverige sedan 2011. Tre gånger om året arrangeras Kleindagarna i ett samarbete mellan Svenska Kommittén för Matematikutbildning, SKM, Svenska Nationalkommittén för Matematik, KVA, och Institut Mittag-Leffler. Dagarna finansieras av Brummer & Partners. Under några dagar träffas ett tjugotal lärare på Institut Mittag-Leffler utanför Stockholm. Tillsammans utvecklar de lektioner som ska vara relevanta för kursmålen i någon av gymnasiets matematikkurser, men som också ska väcka intresse och inspirera till vidare studier i matematik. Varje lektion baseras på en föreläsning av en matematiker. Innehållet i föreläsningen är ofta kopplat till matematikerns egen forskning eller till hur matematik används "på riktigt".



Mats Boij, matematikprofessor på KTH, vid tavlan under en diskussion av idéer till en lektion om avstånd.

Institut Mittag-Lefflers biblioteket med dess rika samlingar av viktiga verk.

Namnet Kleindagarna och inspiration till upplägget kommer från Felix Klein (1849–1925) som hade stor betydelse både som matematiker och för matematikutbildning. Han gjorde betydande bidrag inom gruppteori, komplex analys och icke-euklidisk geometri och sammanförde olika delar av matematiken. I början av 1900-talet formulerade han ett förslag till läroplan för gymnasiet som fick betydelse för utformningen av matematikundervisningen i många europeiska länder. Han verkade även för att kvinnor skulle få studera matematik och var handledare för den första kvinnliga doktoranden i Tyskland.

De färdiga lektionerna från Kleindagarna publiceras digitalt för att finnas tillgängliga och kunna användas av andra lärare, antingen som de är eller som inspirationskälla till vidare utveckling.

De lärare som ingick i planeringsgruppen var Beata-Jasmin Hussain, Cliff Robinson, Cordula Richter, Maria Hagemann-Jensen och Mattias Steinwall, under ledning av Mikael Cronhjort.

Figur 1 är skapad av Cliff Robinson, figur 2 och 3 är hämtade från Wojciech Chachólskis föreläsningsmaterial.

LITTERATUR OCH LÄNKAR

Bengmark, S. (2012). *Kleindagarna 2011*. Nämnaren 2012:1.

Scolamiero, M., Chachólski, W., Lundman, A., Ramanujam. R. & Öberg, S. (2017). Multidimensional Persistence and Noise. *Foundations of Computational Mathematics* 17(6), 1367–1406.

Chachólski, W. & Riihimäki. H. (2020). Metrics and Stabilization in One Parameter Persistence. *SIAM Journal of Applied Algebra and Geometry*, 4(1), 69–98.

https://bscs.org/bscs-5e-instructional-model/
https://kleindagarna.se/kleinmaterial/lektioner/
https://www.mathunion.org/icmi/activities/klein-project/activities/klein-project