HÖGSKOLAN
I GÄVLE

AKADEMIN FÖR TEKNIK OCH MILJÖ
Avdelningen för elektronik, matematik och naturvetenskap

Laborativ matematikundervisning på lågstadiet

En studie om fem lågstadielärares arbetssätt och perspektiv på ämnet

2018

Natalia Haraldsson

Examensarbete, Avancerad nivå, 30 hp

Examensarbete för grundskollärare F-3: matematik med ämnesdidaktisk inriktning

Handledare: Mirko Radic
Examinator: Iiris Attorps

Sammanfattning:

Syftet med detta examensarbete är att undersöka hur några lågstadielärare ser på den laborativa matematikundervisningen med elever samt hur deras perspektiv på ämnet samt deras arbetssätt förhåller sig till den i studien använda forskningen. För att få svar på dessa frågor har jag använt mig av den kvalitativa metoden som kallas för ostrukturerad intervju (Bryman, 2012). Alla de intervjuade lärarna verkar se laborativt arbetssätt som ett viktigt och självklart inslag i matematikundervisning för alla elever. Detta arbetssätt skapar möjligheter för alla elever och läraren att lära av varandra oavsett elevernas individuella förutsättningar. Det laborativa arbetssättet både beskrivs och används som källa till elevens fördjupade långsiktiga matematiklärande och hennes ökade motivation i lärprocessen. Lärarna lyfter även arbetssättets inkluderande roll i matematikklassrummet. De inslag som verkar centrala i lärarnas laborativa undervisning är: gemensam introduktion, stödjande frågor till eleven, progression och långsiktighet i arbetet.
Utifrån de ovanför beskrivna resultaten verkar lärarnas arbetssätt i hög grad överensstämma med de forskningsansatser som jag har valt att utgå ifrån i mitt arbete.

Nyckelord: laborativt arbete, lågstadieelever, lärande, matematik, undervisning

Innehållsförteckning:

1 INLEDNING....1
1.1 Bakgrund....2
1.2 Litteraturgenomgång....3
1.2.1 Vad är konkret material och det laborativa arbetssättet i matematiklärandet?....3
1.2.2 Varför ska man arbeta laborativt i matematik?....4
1.2.3 Hur ser grundskollärare på det laborativa arbetssättet i matematik på lågstadiet?....6
1.3 Syfte och frågeställningar....7
2 METOD....8
2.1 Urval....8
2.2 Datainsamlingsmetoder....8
2.3 Procedur....10
2.4 Analysmetoder....11
3 RESULTAT....12
3.1 Hur ser några lågstadielärare på det laborativa arbetssättet?....12
3.1.1.Laborativt arbetssätt som en effektiv undervisningsstrategi i arbetet med ”vissa elever”....12
3.1.2 Laborativt arbetssätt som effektiv undervisningsstrategi i arbetet med alla elever....13
3.1.3 Laborativt arbetssätt som ett viktigt inslag i en lärande gemenskap....15
3.1.4 Laborativt arbetssätt som en bedömningsstrategi....16
3.1.5 Laborativt arbetssätt är ”att leka matematik”....18
3.1.6 Laborativt arbetssätt som en väg till variation i matematikundervisning....20
3.2. Hur arbetar de intervjuade lärarna med laborativt material i matematik?....21
3.2.1 Lärarnas medverkan genom introduktion av det erbjudna laborativa materialet....21
3.2.2 Lärarens medverkan via medveten planering av elevens progression....23
3.2.3 Frågornas roll i lärarens medverkan....24
3.2.4 Elevens självständiga användning av laborativt material....25
4 DISKUSSION....26
4.1 Hur ser lärarna på det laborativa arbetssättet i matematik?....26
4.1.1 Laborativt arbetssätt som ett undervisningssätt för alla elever....26
4.1.2 Laborativt arbetssätt som en effektiv undervisningsstrategi i arbetet med ”vissa elever”....29
4.1.3 Reflektionens betydelse....29
4.1.4 Den lärande gemenskapen....30
4.1.5 Variationens betydelse....33
4.1.6 Laborativt arbetssätt är att ”leka matematik”....34
4.2 Hur förhåller sig lärarnas arbetssätt till den i studien använda forskning?....37
4.2.1 Lärarnas medverkan genom introduktionen av det erbjudna laborativa materialet samt genom deras närvaro under arbetets gång....37
4.2.2 Det långsiktiga arbetet med laborativt material....39
4.2.3 Planering av progression och lärarens frågor i lärarnas laborativa arbetssätt....40
4.2.4 Lärarens medverkan som medutforskare av matematiken....42
4.2.5 Elevens fria tillgång till det laborativa materialet....42
5 SLUTSATSER....44
6 REFERENSER....45
7 BILAGA 1....49

1 INLEDNING

PISA och Skolverkets rapporter vittnar om svenska elevers icke-tillfredsställande kunskapsutveckling i matematik (Skolinspektionen, 2009; PISA, 2015). Trots viss förbättring av de svenska elevernas matematikresultat i PISA och Timss-undersökningar vittnar Skolinspektionens rapport om att många grundskoleelever i Sverige saknar de mest grundläggande kunskaper och färdigheter i matematik och den politiska debatten lyfter att kunskapsklyftan i den svenska skolan fortsätter att växa. Det är alltså inte alla elever som får ta del om den sist uppmärksammade positiva vändningen i de internationella kunskapsmätningarna (Skolinspektionen, 2009: 22).

Samtidigt som matematiken är ett av de mest centrala ämnena i skolan upplever många lärare att det även är ett speciellt komplext undervisningsområde (Mudaly & Naidoo, 2015). Det är även själva eleverna som känner oro inför matematiklektioner och betraktar matematiken som ett tråkigt och mycket teoretiskt ämne (Sherman, Rickardson & Yard, 2014). Mitt engagemang för dessa frågor är ännu starkare eftersom jag själv har tillhört den ovanför nämnda elevkategorin. Matematiklektioner förknippar jag med stress, osäkerhet och sömnlösa nätter. Därmed upplever jag som angeläget att undersöka hur jag i min framtida yrkesroll kan arbeta för alla elevers engagemang och inkludering i undervisning. Min tanke är att hitta vägar till ett matematiklärande som samtidigt är utmanande och lustfyllt och kan därmed bli till en livslång lärprocess för mina elever.

Mycket av forskning tyder på att det effektiva arbetet med laborativt material kan ha en sådan kraftfull potential i skolmatematiken. Det kan påverka på ett positivt sätt elevers lärande i matematik samtidigt som det tydligt bidrar till en positiv och lustfylld stämning i klassrummet (Sowell, 1989; Satsangi, Bouck, Taber-Doughty, Bofferding & Roberts, 2016; Raphael & Wahlström, 1989).

Forskning (Engvall, 2013; Löwing, 2004) visar samtidigt att det laborativa arbetssättet i matematik används i väldigt begränsad utsträckning medan läroboken som det centrala läromedlet vinner mark i svensk skola. Skolinspektionen noterade år 2009 att under de föregående tio åren hade elevernas problembaserade arbete i helklass och mindre grupper (den så kallade ”inquiry based teaching”) minskat till förmån för det självständiga lärobokscentrerade arbetet vilket ska ha bidragit till negativ utveckling när det gäller de svenska elevernas matematiklärande. Det var endast 6 % av undervisningstiden i svenska klassrum som användes till att arbeta undersökande med matematiska frågor (Skolinspektionen, 2009). Detta kan anses problematiskt då forskningen inom matematik som undervisningsämne betonar att just det undersökande arbetssätt där elever får möjlighet att tillsammans och genom diskussion förhandla sig fram till en djupare matematikförståelse får bäst effekt på deras utveckling och lärande inom ämnet. Det effektiva laborativa arbetet inom matematik kopplas ofta just till ett undersökande arbetssätt inom matematik samt till probleminriktat arbetssätt i matematik (McNeil, Uttal, Jarvin & Sternberg, 2009). Ökad effektiv användning av laborativt material skulle därmed kanske kunna på ett positivt sätt bidra till utveckling av den svenska matematikundervisningen.

Både elevernas negativa attityder till matematik som skolämne och lärobokens centrala och styrande roll i svensk matematikundervisning och även mina egna erfarenheter av matematikundervisning har inspirerat mig att närmare undersöka laborativ matematikundervisning som fenomen i två svenska skolor. Jag upplever detta

undervisningsområde som viktigt och intressant även i ljuset av de forskningsresultat som betonar lärares begränsade kunskaper om det effektiva laborativa arbetssättet i den dagliga undervisningen (Löwing, 2004; Moyer, 2001).

1.1 Bakgrund

Trots de omfattande forskningsresultat som tydligt pekar på den laborativa undervisningens avgörande betydelse för elevens matematiklärande omnämns inte denna metod en enda gång i den svenska grundskolans läroplan. Detta kan kontrasteras mot den amerikanska grundskolans styrdokument som tydligt föreskriver läraren att använda sig av konkret material inom alla ämnesområden samt på alla utbildningsnivåer (Moyer, 2001). Varför lyser det laborativa arbetet med sin frånvaro i de svenska styrdokumenten? Skolinspektionen lyfter i sin rapport den svenska läroplanens tydliga fokus på vad eleverna ska uppnå inom de respektive ämnena snarare än på hur de ska göra detta (Skolverket, 2011b).

Av Skolverkets läroplan för grundskolan (2011a) får vi alltså veta att eleverna ska lära sig att:

- värdera valda strategier
- analysera matematiska begrepp och samband
- använda lämpliga matematiska metoder
- föra och följa matematiska resonemang
- använda matematikens uttrycksformer. (Skolverket, 2011a)

Dessa förmågor och färdigheter hänvisas dock inte till några särskilda läromedel eller arbetssätt. Det laborativa arbetssättet har emellertid enligt den i min studie presenterade forskning en framstående roll i alla dessa förmågors utveckling hos de yngre eleverna. Båda citerade formuleringarna: ”strategier” och ”matematikens uttrycksformer” kan naturligtvis innefatta det konkreta materialet som både problemlösningsstrategi och som ett uttryckssätt för det matematiska tänkandet. Det uttrycks dock ganska luddigt vilket gör att denna aspekt av matematiklärandet kan förbises och prioriteras bort i lärarens tolkning av styrdokumentets mål (Skolverket, 2011b).

Löwing (2004) och Engvall (2013) som har undersökt svenska klassrum ser de svenska matematiklärarnas sätt att undervisa med hjälp av laborativa material som problematiskt. Det laborativa arbetssättet får enligt deras studier mycket begränsat utrymme i matematikundervisning. Engvall (2013) kan även konstatera att vissa lärare avstår helt från att använda det konkretiserande materialet i sitt arbete. Samtidigt iakttar forskarna att de lärare som väljer att använda laborativt material i sin undervisning gör det ofta på ett mindre effektivt sätt.

Löwing ser en viktig koppling mellan lärarnas benägenhet att basera sin undervisning på ett enda läromedel och det mindre effektiva laborativa arbetet. Enligt Löwing skapar detta arbetssätt en oklarhet över undervisningens syfte. Läraren överlåter ansvaret för utstakning av matematiklektionernas mål till läromedlet. Detta i sin tur leder även till svaga kopplingar mellan de konkretiserande representationerna och det behandlade ämnesinnehållet. Det laborativa arbetet blir till det som Trygg benämner enbart ”görande” berövat en större mening (Trygg, 2014). Löwing lyfter att de laborativa aktiviteterna oftast genomförs av eleverna som ett individuellt arbete och sällan följs av reflektion över deras matematiska abstrakta innebörd och konsekvenser. Det fattas även en tydlig koppling mellan de laborativa momenten och det behandlade matematikområdet. Hon drar därmed slutsatsen att de observerade lektionerna

snarare handlar ”om räkning än om matematik” (Löwing, 2004). Det är alltså faktakunskaper och räknafärdigheter som uppmuntras av lärarnas arbetssätt på bekostnad av den begreppsliga förståelsen och resonemangsförmågan vars utveckling också betonas i den svenska läroplanen.

Skolverket konstaterar i sin rapport om den laborativa undervisningen att den styrande roll som läroböcker i matematik har fått i svenska matematikundervisning kan härledas just till den ovannämnda vaga karaktären hos svenska läroplanen. Läroboken blir det stöd i lärarnas dagliga arbete som styrdokumentet skulle kunna bli om de hade blivit tydligare och mer konkret formulerade (Skolverket, 2011b). Författarna tillägger även att lärarna ofta saknar den ämneskompetens som skulle behövas för att på ett effektivt sätt kunna utveckla de förmågor som omnämns i läroplanen. Därför upplever de läroboken som ett nödvändigt stöd i sitt arbete med elever (Skolverket, 2011b).

Både Skolverkets rapport gällande det laborativa arbetet i svensk grundskola och forskarnas iakttagelser om svensk skola pekar på att det laborativa undervisningens roll i den svenska skolan är hotad.

1.2 Litteraturgenomgång

1.2.1 Vad är konkret material och det laborativa arbetssättet i matematiklärandet?

Laborativt material har en lång historia och en viktig plats i det matematiska tänkandets utveckling hos oss människor. De gamla civilisationerna i Mellanöstern, sådana som Egypten och Mesopotamien började använda fysiska hjälpmedel i matematiken flera århundraden före Kristus. Ler- och träbrickor användes flitigt till olika sorters uträkningar i den vardagliga matematiken. I det gamla Rom skapades lite senare de första kulramarna som effektiviserade beräkningar och som vi använder än idag (D´Angelo & Illiev, 2012).

Det är dock först på 1800-talet som laborativa material började användas på det sätt som vi använder dem i dag i förskolor och skolor. Det är också då som dagens förståelse av begreppet ”laborativt material” började ta sin form. Det konkretiserande materialet fick då sin specifika roll i matematikundervisning och begreppet *laborativt material* började definieras som ”flyttbara föremål som talar till den lärandes olika sinnen” (Swan & Marshall, 2010). Friedrich Fröbel som 1937 startade världens första förskola skapade konkret material som skulle hjälpa barnen upptäcka de geometriska former som finns i naturen. Maria Montessori fortsatte och utvecklade Fröbels arbete då hon på 1900-talet skapade nytt laborativt material som riktade sig till förskole- och lågstadieelever. Montessoris material skulle utgöra konkreta representationer av grundläggande matematiska begrepp (D’Angelo & Illiev, 2012).

På 1900-talet började det laborativa materialet få en ökande och mer central roll i den ordinarie matematikundervisningen i förskolan och i skolans tidigare år.

Swan och Marshall definierar laborativt material i matematikundervisning som ”objects that can be handled by an individual in a sensory manner during which conscious and unconscious mathematical thinking will be fostered.” (Swan & Marshall, 2010, s. 14). Det som vidare utmärker denna typ av läromedel är deras potential att stödja utveckling av matematisk begreppsförståelse (Swan & Marshall, 2010, s. 14). Forskarna Stein och Bovalino ser också laborativt material som ett verktyg i elevens matematiska meningsskapande: laborativt

material är enligt dem konkreta verktyg för eleven att resonera och tänka och skapa mening med. På det sättet skapar de en fast grund för elevens fortsatta utveckling samt hjälper skapa strukturer i de befintliga kunskaperna (Stein & Bovalino, 2001)

Malmer gör ett försök att kategorisera den breda variation av laborativt material som används i dagens svenska skola:

- material för sortering, klassificering, jämförelse
- strukturell materiel för arbete med tal- och taluppfattning
- relationsmateriel- använd för att tydliggöra matematiska relationer och processer
- utrustning för övningar med olika enheter (längd, massa, volym)
- färdighetsträning material
- övrigt: tärningar, spel, kortlekar (Malmer, 2002, s. 94)

Swan och Marshall nämner de mest frekvent använda laborativa material i USA:s grundskolor. Dessa är bland annat: mönsterblock, Dienes tiobasmaterial, Unifix-kuber samt Cuisenaire-stavar (Swan & Marshall, 2010, s. 15).

Vad innebär laborativt matematiklärande och laborativ matematikundervisning? För att svara på denna fråga ska jag använda mig av Tryggs och Rydsteds egna definition av begreppet. Laborativ matematikundervisning är

> ”en verksamhet där elever inte enbart deltar mentalt utan också arbetar praktiskt med material i undersökningar och aktiviteter som har ett speciellt undervisningssyfte” (Trygg & Rystedt, 2010, s. 5)

samt att:

> ”Det som utmärker laborativ matematikundervisning är att fler sinnen tas i bruk ... och att det finns en stark koppling mellan konkret och abstrakt” (Trygg & Rystedt, 2010, s. 5).

Innebär allt arbete som sker i skolan där laborativt material används ”laborativ matematikundervisning”? Enligt Swan och Marshall ska som nämnt tidigare syftet med det laborativa arbetet vara ”inbyggt” i själva laborativa materialets utformning (Swan & Marshall, 2010, s. 14). Ekström och Palm i Skolverkets rapport delar dock inte denna syn på laborativt arbete. De menar att man snarare ska rikta fokus i analysen av matematikundervisning på det som sker i klassrummet och inte enbart på det material som för tillfället används när man pratar om laborativ matematikundervisning. Det är ”verbet *konkretisera* som i stället borde lyftas” (Skolverket, 2011b, s. 28). Jag kommer i överensstämmelse med Ekströms och Palms perspektiv på det laborativa arbetet i min undersökning lägga fokus på denna förståelse av begreppet laborativt arbete. Det är läroprocessens syfte, karaktär och effekter, alltså den konkretiserande undervisningens utformning som äger rum i klassrummet, som kommer bli central för detta arbete (Skolverket, 2011b).

1.2.2 Varför ska man arbeta laborativt i matematik?

Mycket av forskning tyder på att arbetet med laborativt material påverkar på ett positivt sätt elevers lärande i matematik (Sowell, 1989; Satsaji et. al, 2016; Raphael & Wahlström, 1989).

Laborativt material hjälper knyta an till elevens vardag och förförståelse, gör elevens matematiska kunskaper mer flexibla och utvecklar elevens förmåga att tillämpa dessa kunskaper i varierande sammanhang (Moch, 2008). Laborativt material bygger samtidigt länkar mellan det konkreta och det abstrakta, vilket är speciellt viktigt för lågstadieelever som

fortfarande är mycket beroende av de konkreta representationerna och det konkreta tänkandet i sitt matematiklärande (Moch, 2008).

Det laborativa arbetet i matematiken blir till en gemensam upplevelse som även inspirerar till gemensam reflektion och diskussion (D´Angelo & Illiev, 2012; Moch, 2008). Ett sådant arbetssätt synliggör elevernas olika tankesätt och matematiska strategier och därigenom låter dem berika varandra i läroprocessen. I detta sammanhang träder fram det kooperativa lärandet som låter eleverna bygga den så kallade lärande gemenskapen (Heddens, 1986).
Även det sociokulturella perspektivet och begreppet *den proximala utvecklingszonen* gör sig gällande här (Vygotskij, 2001; D´Angelo & Illiev, 2012). Det språk som eleverna använder när de diskuterar och reflekterar över sitt laborativa arbete blir den scaffolding som låter dem utvecklas inom den proximala utvecklingszonen (Vygotskij, 2001). På det sättet blir även det laborativa materialet ett verktyg (artefakter) som minskar avståndet mellan det eleven redan kan och det hon fortfarande behöver lära sig, de matematiska operationer som eleven inte skulle vara i stånd att utföra enbart med hjälp av abstrakt matematiskt språk klarar hon med hjälp av det laborativa materialet (Kosko & Willkins, 2010; Vygotskij, 2001).

Enligt Timmermann & Sriraman & Lesh blir de konkretiserande representationerna till den kontext som låter eleven bygga upp begreppslig förståelse nödvändig för att kunna på ett meningsfullt sätt använda abstrakta matematiska symboler (algebraiska symboler) (Sriraman & Lesh, 2007; Timmermann, 2014). Konkretiserande material minskar alltså avståndet mellan det konkreta och det abstrakta i matematiklärandet.

Det laborativa materialet i kombination med lärarens medvetna vägledning, utgör det som Heddens kallar för ”bridginging the gap between the Concrete and the Abstract”, ett sätt att bygga broar mellan de två avlägsna världarna: den konkreta och den abstrakta (Heddens, 1986, s. 14). Samtidigt skapas det länkar mellan den abstrakta matematiska idéen (som lågstadieelever ofta ser som en stor utmaning) och elevens eget tänkande (Heddens, 1986).

Enligt Thompson är det först när eleven har gjort ett begrepp till sitt eget som hon kan vara kreativ i sitt lärande. Automatiserad användning av matematisk konvention blir till ett kreativt uttryck där matematisk konvention blir ett viktigt kommunikationsverktyg (Thompson, 1992). Den mer personliga användningen av matematiska språket skapar samtidigt större engagemang hos eleven. Det är inte enbart fördjupning av begreppsförståelsen som sker utan även rekonstruering av det behandlande matematiska begreppet via det konkretiserande materialet. Det är denna rekonstruering samt den kreativa dimensionen i processen som gör de utvecklade kunskaperna bestående samt mer flexibla, alltså applicerbara i nya kontexter (D´Angelo & Illiev, 2012).

Begreppsförståelsen stärks genom att det laborativa arbetet används som en länk mellan olika kunskapsaspekter, skapar relationer mellan de nyvunna kunskaperna samt mellan de nya och de tidigare kunskaperna. Även på det sättet blir de nyvunna matematikkunskaperna mer bestående. På det sättet kan den konkreta dimensionen i det diskuterade arbetssättet bli en förutsättning för elevens ”aha-upplevelse” inom nya matematikområden (Yook & Loong, 2014; Stein & Bovalino, 2001; D´Angelo & Illiev, 2012).

Både Bruner (1973) och Trygg (2014) sätter det laborativa arbetet i ett bredare sammanhang som en del i en större läroprocess där laborativt arbete utgör en oumbärlig länk. Det laborativa materialet blir viktigt i den första ”konkreta ” (Trygg, 2014, s. 178) etappen av läroprocessen. Det konkreta materialet i kombination med kommunikation mellan läraren och eleven samt

eleverna sinsemellan ska åskådliggöra något abstrakt (Bruner, 1973; Trygg, 2014). Nästa steg blir enligt Bruner (1973) att föreställa denna abstrakta idéen via teckning eller skriftlig representation. Den mest abstrakta representationen av de matematiska idéerna blir den mentala representationen, alltså det abstrakta matematiska tänkandet (Bruner, 1973).

Trygg urskiljer flera etapper i elevens utveckling från det konkreta till det abstrakta tänkandet där den konkreta etappen åtföljs av den halvkonkreta med naturtrogna teckningar och därefter den halvabstrakta med elevens egna symboliska teckningar. Det är det abstrakta matematiska språket som enligt Trygg (2014) blir ett tydligt uttryck för den mest avancerade abstrakta förståelsen i matematiken.

Uttal, Scudder och DeLoache talar i sina studieresultat om två undervisningsinslag som kan hjälpa läraren just att koppla ihop den konkreta och den abstrakta dimensionen i matematiken. ”Connecting” (Uttal, Scudder & DeLoache, 1997, s. 48) och ”dual representation”(Uttal et. al, 1997: 49) syftar till att explicitgöra den symboliska betydelsen av det laborativa materialet via de återkommande kopplingar läraren gör mellan de två dimensionerna (Uttal et. al, 1997). I artikeln *Rethinking the use of Concrete Materials in Learning: Perspectives From Development and Education* av McNeil och Uttal kommer forskarna fram till att lärarens medverkan har central betydelse för elevens meningsskapande men samtidigt behöver denna medverkan vara välavvägd. Den kan inte utformas i en rad instruktioner som eleverna ska okritiskt följa utan snarare handla om problemlösning och utforskande vid lärarens vägledning (McNeil & Uttal, 2009).

Som nämnt ovan är lärarens medvetna planering av undervisningsmoment samt hennes vägledning och engagemang avgörande för att det laborativa arbetet ska kunna spela den diskuterade viktiga rollen i elevens lärandeprocess. Forskning visar att närvaron av det laborativa materialet i sig inte är tillräcklig för att säkerställa att det verkligen bidrar till elevens lärande (Loewenberg Ball, 1992). För att alla de nämnda positiva effekter gällande arbetet med konkretiserande material ska kunna tas till vara blir lärarens medvetna och avvägda medverkan central.

1.2.3 Hur ser grundskollärare på det laborativa arbetssättet i matematik på lågstadiet?

I studien genomförd av Perry och Howard angav de flesta grundskollärarna att de frekvent använde konkret material i sin matematikundervisning och angav elevens lustfyllda lärande som huvudanledning till detta. Lärarna lyfte det laborativa arbetssättet som en positiv upplevelse som alla elever oavsett sin förförståelse och sina matematikkunskaper ska få ha tillgång till (Perry & Howard, 1997). Forskarna ser lärarnas svar som klichéer och ytliga personliga antaganden. Perry och Howard (1997) menar att lärarnas utsagor baseras mer på en egen övertygelse om att hands-on learning är en sorts pedagogiska ideal än på forskning eller vetenskapliga teorier. Trots att majoriteten av de tillfrågade lärarna kontinuerligt använder konkretiserande material i sin undervisning är det få som på djupet verkar förstå syftet med arbetssättet. Forskarna menar att detta kan leda till oreflekterad användning av laborativt material, att det laborativa arbetet får karaktär av ”görande” som inte bidrar på ett betydligt sätt till elevernas utveckling och lärande inom ämnet (Trygg, 2014, s. 178).

Swan och Marshall (2010) påstår även att en lärare som saknar kunskaper om det konkretiserande materialets roll i elevens lärande lättare kan ge upp arbetssättet vid svårigheter och misslyckanden. Lärarens positiva attityder till det laborativa arbetet kan också spela roll för elevens lärande då läraren enligt D’Angelo och Iliev vägleder sina elever även

genom att väcka deras nyfikenhet och bjuda in till utforskandet av materialet (D'Angelo & Illiev, 2012).

Moyer urskiljer två teman i de observerade och intervjuade lärarnas matematikundervisning: ”fun math” och ”real math” (Moyer, 2001, s. 187). Hon ser som problematiskt att laborativt material verkar i deras dagliga arbete representera ”fun math” alltså den delen av lärandet som framför allt ska spela underhållande roll och anses underlägsen ”den riktiga skolmatematiken”, alltså det som kallas ”real math” (Moyer, 2001, s. 187). Medan den första inkluderar matematiska representationer av olika slag styrs den andra av läroboken. Moyer ser inget större samspel mellan de två typer av matematikundervisning där den laborativa matematiken skulle kunna utveckla eller komplettera skolmatematiken. De fungerar snarare som två skilda parallella världar (Moyer, 2001).

Moyer konstaterar att detta arbetssätt har sitt ursprung i det sätt på vilket lärandet utvärderas i landets (USAs) skolor. De standardiserade testerna i ämnet kontrollerar framför allt elevernas procedurförmåga och beräkningsfärdigheter och inte problemlösningsförmågan och begreppsbildning i första hand. Därför anpassas även användning av konkret material efter samma lärogång och samma rutiner. Den press som lärarna upplever i sitt dagliga arbete påverkar även deras attityder till det laborativa arbetet. I stället för att bli en meningsfull och viktig länk i lärprocessen blir det laborativa arbetet i stället en form av belöning för hårt och kanske även monotont arbete i läroboken (Moyer, 2001). Det som saknas i detta sammanhang blir alltså viktiga kopplingar mellan det laborativa arbetet: den konkreta representationen och de abstrakta matematiska idéerna. De innehåll man arbetar med laborativt sammanfaller inte med de frågor man tar upp i skolmatematiken. De nödvändiga enligt den presenterade forskningen (Daniels, Hyde & Zemelman, 1993) länkar i läroprocessen: den halvkonkreta och halvabstrakta etappen verkar också lysa med sin frånvaro i lärarnas arbete.

När Moyer (2001) söker förklaringar till den undervisningspraktik där arbetet i läroboken blir det centrala arbetssättet citerar hon Elbow: "much teaching behavior really stems from an unwarranted fear of things falling apart" (citerad i Moyer, 2001, s. 190). Lärare upplever enligt hennes studier viss oro inför undervisningssammanhang som avviker från de invanda traditionella rutinerna. Det laborativa arbetet utgör en undervisningspraktik som uppmuntrar eleverna till diskussion och interaktion. På det sättet kan det uppfattas som ett störande moment som ifrågasätter de invanda tysta och ordningsamma arbetsrutinerna i klassrummet (Moyer, 2001).

1.3 Syfte och frågeställningar

Syftet med detta arbete är dels att undersöka hur några lågstadielärare ser på det laborativa arbetet i matematik samt hur deras arbetssätt förhåller sig till de i studien presenterade forskningsresultaten. Undersökningens frågeställningar är alltså:

1) Hur ser några lågstadielärare på undervisning med hjälp av laborativt material?
2) Hur förhåller sig deras arbetssätt med laborativt material till den i studien använda forskningen?

2 METOD

2.1 Urval

Vetenskapsrådets (2011) forskningsetiska principer är: informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet.

Samarbetet med mina undersökningspersoner inleddes genom ett mail som skickades till sammanlagt nio grundskollärare. Alla informerades om undersökningens syfte och även om dess frivilliga karaktär. Jag lyfte i brevet att lärarna hade möjlighet att avbryta sin samverkan närhelst de önskade och att hela intervjun skulle spelas in på min mobil och därefter transkriberas. Jag har även angett den ungefärliga tid som intervjun skulle ta: från 15 till 25 minuter. Denna information upprepades även muntligt inför varje intervju och inför den observation som jag genomförde. Detta tillvägagångssätt skulle signalera att respondentens tid betraktas av mig som värdefull (Bryman, 2012).

Vid den första kontakten meddelade jag även att all information som lärarna skulle dela med sig till mig skulle behandlas och hanteras med största möjliga försiktighet och att ingen förutom mig skulle få tillgång till den. Jag har även sett till att detta konfidentialitetskrav har uppfyllts. Jag transkriberade mina intervjuer systematiskt och ofta samma dag som de genomförts. Alla namn på personer och platser byttes ut i texten mot fingerade namn så att alla undersökspersonerna kunde förbli anonyma.

Enligt Bryman är det just kvalitativa undersökningar som kräver särskild försiktighet och vaksamhet just när det gäller konfidentialitetskravet. Dessa metoder lägger tydligare fokus på enskilda personers erfarenheter och åsikter (Bryman, 2012, s. 133). Konfidentialiteten blir även av avgörande betydelse för framtidens forskning. Den blir en viktig förutsättning för samhällets förtroende mot forskning och forskarkulturen. Brymans iakttagelser uppmuntrade mig alltså till stor vaksamhet och försiktighet i mitt forskningsarbete. Jag var mycket noga med att göra de olika personerna och platserna anonyma på ett sätt som helt omöjliggjorde identifikationen av dessa.

Nyttjandekravet uppfylldes genom att jag inte använde de insamlade data till andra ändamål än denna undersökning och besvarandet av mina frågeställningar (Bryman, 2012, s. 132).

2.2 Datainsamlingsmetoder

Min undersökning har kvalitativ karaktär. Frågeställningarna har varit ganska generella, syftet var att få veta mer om det laborativa undervisningssättet i matematik på lågstadiet, hur några lärare ser på detta arbetssätt och hur de praktiskt använder sig av det i sin undervisning. Jag har haft en uppsättning av teoretiska ansatser och forskning som jag utgick ifrån när jag började undersöka det valda området men det teoretiska ramverket fick både utökas och justeras under arbetets gång. De analytiska verktyg som jag använde mig av påverkades bland annat av de intervjuade lärarnas tankegångar och resonemang. Detta tillvägagångssätt verkade spännande och tilltalande just eftersom dess resultat inte kunde förutsägas (Bryman, 2012, s. 413). De generella preliminära frågeställningarna skulle så småningom avgränsas och även

specificeras i resultat- och speciellt i diskussionsdelen där dessa frågor skulle diskuteras med hjälp av de teoretiska och analytiska verktyg som ter sig lämpliga i detta sammanhang.

Den kvalitativa karaktären av undersökningen påverkade alltså mitt fokus under arbetets gång. Det var de intervjuade personernas perspektiv, funderingar, tankar och erfarenheter som blev centrala i mina resonemang snarare än mina förutbestämda specifika frågor. Intervjufrågorna skulle däremot hjälpa att behålla fokus på det diskuterade ämnesområdet och fördjupa respondenternas resonemang samt spinna vidare på deras tankar. Detta tillvägagångssätt lät personerna ta upp problem och frågor som för dem kändes angelägna utifrån egen erfarenhet, bakgrund och egen övertygelse. Jag ville gärna att de genom både formen och innehåll i sina svar skulle förmedla sina mer och mindre medvetna värderingar, ståndpunkter och perspektiv inom ämnet. Vad är det som de betonar som viktigt? Vilka delar av det undersökta området hamnar i skymundan av deras resonemang? Vad kan detta innebära och ha för förklaringar? Detta tillvägagångssätt kan jämföras med Leidner (1993, s. 238) som i sin studie ”lämnade utrymme för de anställda att ta upp teman som de var speciellt intresserade av”. Ser jag några mönster: skillnader eller likheter mellan de svar jag får av de olika intervjupersonerna? Finns det några förklaringar till dessa mönster och regelbundenheter?

Den generella karaktären hos de frågeställningar som skulle analyseras och utforskas lät mig rikta blicken mot detaljer och nyanser i mina intervjupersoners resonemang: språkliga formuleringar samt de begrepp och diskurser de använde sig av. Kunde jag urskilja några mönster, återkommande teman i deras uttalanden och tankesätt? Fanns det nyanser, likheter och skillnader i deras perspektiv? Vad talade dessa inslag i intervjuerna om för mig om dessa lärares syn på det undersökta området? Mina respondenter tog mig på en spännande resa med oanade destinationer.

Med de ovanför nämnda tankarna och syftena som utgångspunkt har jag valt att använda mig av den ostrukturerade intervjun som den viktigaste metoden i arbetet. Den lät mig sträva efter de tidigare nämnda målen men blev även en förutsättning för andra viktiga aspekter i undersökningen. Undersökningens resultat och även dess trovärdighet kan betydligt påverkas av den intervjutyp man använder i respektive undersökning och till respektive frågeställning. Den ostrukturerade intervjun kan även påminna om en djupintervju där man låter personen tala fritt utifrån den ställda frågan, uttrycka sina associationer och ståndpunkter. Tanken med denna metod är att påverka intervjupersonens svar i så liten grad som möjligt. Den ostrukturerade intervjuns flexibla karaktär som påminner om ett vanligt samtal (Bryman, 2012, s. 415) där intervjuarens frågor tenderar att spinna vidare på intervjupersonens svar kunde enligt mitt omdöme bli ett effektivt verktyg i detta sammanhang. Den spontana avslappnade situationen som kan likna den av ett vanligt samtal kan hjälpa att frigöra intervjupersonens spontana associationer och låta henne svara i enlighet med sin inre övertygelse.

Samtidigt, I enlighet med Bryman hade jag tagit hänsyn till min intervjuplanering och vissa strukturella drag i intervjun. Jag har försökt (även i enlighet med de etiska aspekterna) inleda intervjuerna genom att förtydliga intervjuns syfte och stämma av med intervjupersonen om hon godkände mitt sätt att dokumentera intervjun (spela in den). Därefter följde frågorna alltså intervjuns huvuddel som sedan gick över i kort sammanfattning av det intervjupersonens hade sagt och avstämning med henne om dessa ståndpunkter och perspektiv var riktiga. Jag har även valt att noggrant tänka igenom och analysera de frågor jag ville utgå ifrån i intervjun men samtidigt var mån om att behålla den flexibla inställningen till

intervjupersonens svar och formulera uppföljningsfrågor med det Bryman kallar för ”ödmjukhet” (Bryman, 2012, s. 430). Denna ödmjukhet uttrycktes även i mitt sätt att anpassa ordningen på de tidigare förberedda frågorna efter intervjupersonens resonemang. Det hände även att jag medvetet avstod från att ställa vissa av dessa frågor eftersom de inte verkade aktuella eller tappade sin betydelse i ljuset av personens uttalanden. Jag tror att de ovanför diskuterade strukturella dragen var också av betydelse för intervjuns trovärdiga och mångfacetterade resultat.

Mitt fokus i undersökningen var brett men samtidigt bestämt i viss mån vilket lät mig på ett medvetet sätt utforma både mina tidigare planerade intervjufrågor och mer spontana uppföljningsfrågor i intervjun (Bryman, 2012, s. 416). Detta i sin tur underlättade att i analys- och diskussionsdelen ta sig an ”mer specifika frågeställningar ” (Bryman, 2012, s. 416) inom området som Bryman benämner det.

Den generella karaktären hos mina frågor såsom till exempel: ”Vilka är dina uppfattningar om det laborativa arbetssättet i matematik?” och ”Vad tycker du är viktigt i detta arbetssätt?” hindrade inte ”alternativa idéer eller synsätt” från att dyka upp under undersökningens gång vilket kunde hjälpa att få fram mer nyanserade och intressanta resultat (Bryman, 2012, s. 419). Mer generella och neutrala frågor (sådana som ”Hur gör du när du använder laborativt material? Kan du ge något exempel på lektioner från ditt jobb?” eller ”Vad kan vara svårt i detta arbetssätt?”) motverkade även att mina egna medvetna och omedvetna uppfattningar inom ämnet färgade av sig på undersökningens resultat (Bryman, 2012, s. 421).

Man kan fråga sig hur min metod påverkade resultaten i min undersökning. Parker (2000) konstaterar att de mest intressanta, nyanserade och även mest ärliga svar brukade han först få när bandspelaren hade stängts av. Att intervjupersonens svar spelades in kan alltså ha påverkat svarens trovärdighet.

2.3 Procedur

För att stärka min undersöknings externa reliabilitet har jag försökt på ett så noggrant sätt som möjligt redovisa för mina datainsamlingsmetoder och det tillvägagångssätt jag valde i mitt arbete. Samtidigt inser jag utifrån Bryman (2012) att reliabilitet inom kvalitativ forskning är en komplex fråga. Den externa reliabiliteten innebär nämligen att undersökningens enskilda etapper dokumenteras så noggrant att denna kan upprepas i framtiden av andra forskare. LeCompte och Goetz (LeCompte & Goetz, 1982, s. 352) menar dock att det inte är möjligt att ”frysa” en social miljö på det sättet att detta skulle bli möjligt. Det är också svårt för forskaren att gå in i samma roll som intogs av forskaren i den tidigare undersökningsprocessen (Bryman, 2012, s. 352).

Jag har börjat mitt datainsamlingsarbete genom att skicka mail till tio lågstadielärare från två kommunala grundskolor i två olika kommuner. Dessa skolor har jag valt att kalla Skola A och Skola B. Skola A är en låg- och mellanstadieskola och Skola B är en grundskola med årskurser f-9. Båda ligger i mångkulturella förorter söder om Stockholm.

Jag har fått positivt svar från två lärare från Skola A och från tre lärare från skola B. Alla dessa lärare var utbildade och legitimerade lågstadielärare och en av dem även med speciallärarutbildning inom matematik. När det gäller lärarnas erfarenhet inom yrket har:

Berit: 20 års erfarenhet av undervisning som både lågstadielärare, speciallärare och lärare i grundsärskola

Adam: 1 års erfarenhet av arbete som lågstadielärare

Gunvor: 30 års erfarenhet av arbete som lågstadielärare och även de senaste åren som specialpedagog

Emma: 10 års erfarenhet av arbete som lågstadielärare

Sara: 15 års erfarenhet av arbete som lågstadielärare

Under de efterföljande tre veckorna bestämde jag via mail tid för intervjuer med lärarna. Samtliga intervjuer spelades in på min mobil och sedan överfördes till min personliga dator. Under tre av de fem intervjuerna förde jag även anteckningar i fall inspelningen skulle misslyckas. Anteckningarna hade också en annan roll. De skulle hjälpa mig att stämma av med informanten riktigheten av hennes påståenden och formuleringar. Under intervjuernas gång gjorde jag pauser för att försöka sammanfatta det hon hade hunnit säga. Detta att försöka stärka undersökningens validitet genom att förmedla undersökningsresultaten till sina informanter kallas för ”respondentvalidering” och diskuteras av Bryman (Bryman, 2012, s. 353).

Efter en djupare analys och reflektion över mina intervjuresultat samt mina frågeställningar kom jag fram till att en ytterligare datainsamlingsmetod skulle kunna fördjupa mina undersökningsresultat och underlätta analysen av den andra frågan i min studie. Triangulering, det att man använder fler än en metod eller datakälla i sin undersökning har även som syfte att stärka forskningsresultatens tillförlitlighet.

Observation av lärarnas undervisning skulle kunna antingen bekräfta eller motsäga de teoretiska perspektiv och de ideal de säger sig arbeta utifrån när det gäller laborativ undervisning i matematik. Jag fick dock ingen möjlighet att observera de intervjuade lärarnas arbete med laborativ matematik dels på grund av sjukdom och dels som följd av lärarnas stora arbetsbelastning just under den diskuterade perioden.

2.4 Analysmetoder

Mitt tillvägagångssätt i själva analysen av de insamlade data påminner om principerna i grounded theory (Bryman, 2012, s. 513-528). En viktig grund för min analys och reflektion över data utgjordes av den vetenskapliga litteratur jag hade studerat för att tydliggöra och formulera mina syften och frågeställningar i arbetet samt för att fördjupa mig i det undersökta ämnesområdet. Detta har bidragit till att jag kunde börja tolka data och ”bryta ner dem i dess beståndsdelar” (Bryman, 2012, s. 516) i ett tidigt skede av undersökningsprocessen. ”Kodningen” som denna etapp i analysprocessen heter kunde alltså påbörjas redan då jag hade genomfört de första intervjuerna.

Som nämnt tidigare är det just tolkningar av de insamlade data som brukar stå i fokus för kvalitativa undersökningar och inte det Bryman kallar för ”i förväg utformade och standardiserade koder” (Bryman, 2012, s. 516). Det som blev fokus för min analys var alltså de teman, mönster och begrepp som jag upptäckte i mina intervjupersoners uttalanden.

Min analys och reflektion skedde genom en kontinuerlig och återkommande läsning av de transkriberade intervjuerna. Detta hjälpte mig att i överrensstämmelse med Brymans ord behålla korrespondens mellan de insamlade data och de teoretiska begrepp och kategorier som blev mina viktiga analysverktyg (Bryman, 2012, s. 517). De begrepp och kategorier som blev centrala för undersökningen har varit bland annat: lärarens medverkan i det laborativa arbetet, den lärande gemenskapen, det laborativa materialets genomskinlighet samt ”connecting” (Heddens, 1986; Uttal, Scudder & DeLoache, 1997, s. 48). Dessa begrepp har blivit verktyg som hjälpte mig jämföra de olika lärarnas uttalanden och de förhållningssätt de tycktes uttrycka i dessa.

3 RESULTAT

3.1 Hur ser några lågstadielärare på det laborativa arbetssättet?

3.1.1.Laborativt arbetssätt som en effektiv undervisningsstrategi i arbetet med ”vissa elever”

Alla de intervjuade lärarna verkar uttrycka uppfattningen om att det laborativa arbetssättet särskilt riktar sig till de elever som upplever svårigheter i matematiklärandet. Berit säger i intervjun:

> Jag tänker också det här med bilder: bilder och konkret material blir också stöd för minnet och stöd för tanken att komma ihåg vad man gör och ibland om man har dåligt arbetsminne, har du inte det konkreta framför dig, du kanske kommer till rätt svar men sedan så händer något som stör men har du det konkreta framför dig så kan du lättare ta upp tråden igen tänker jag. Just när du har koncentrationssvårigheter då ligger ju kuberna kvar där och kan hjälpa dig som ett stöd för minnet och att det är lättare att ta upp tråden (…) Många av de elever som vi har med autism, koncentrationssvårigheter, ADHD alla de här de säger ju att bilder, de minns ju bilder bättre än ord till exempel. Det blir ju en hjälp. (Berit)

> Det har också med lärostilar att göra, en del behöver det konkreta för att komma till en insikt om vad de gör och en del kan klara sig utan. (Berit)

Det är inte alla utan vissa elever som är i särskilt behov av laborativt arbetssätt. Arbetet med det konkretiserande materialet kopplas här till flera olika typer av svårigheter såsom: dåligt arbetsminne, koncentrationssvårigheter samt autism. Även Gunvor verkar se laborativt arbetssätt som en sorts stöttning för elever i behov av särskilt stöd:

> Konkret material är en anpassning man gör. Vid till exempel neuropsykiatriska funktionsnedsättningar. (Gunvor)

Berit, Emma och Adam verkar kategorisera elever i ”de svaga” som behöver stöd i form av laborativt arbetssätt och ”de starka” som kan klara sig utan det.

> För att jobba med stenciler, det blir tråkigt på lång sikt och det blir inte lärande på samma sätt för jag tänker mig, ta till exempel lågpresterande elever som har svårt med matematik, det blir väldigt abstrakt att med ord förklara till exempel addition (Adam)

> För en del elever tror jag absolut kopplar på en gång, bara direkt med kanske siffror eller vad det är (Emma)

> Och jag tänker de som förstår siffror, de behöver ju inte använda konkret. (Berit)

En annan elevkategori som det laborativa arbetssättet kan vara viktigt för är de elever som antingen brottas med någon språkstörning eller är på något annat sätt begränsade i sin verbala kommunikation. För dessa elever blir det konkretiserande materialet ett avgörande kommunikationsverktyg menar lärarna. Genom att peka på bilder och organisera materialet framför sig på olika sätt kan de uttrycka sina strategier, visa hur de tänker och om de har förstått. I lärarnas uttalanden kan man utläsa glädjen över att på det sättet ha skapat en möjlighet för eleverna att agera som kompetenta och självständiga:

> Det med konkret material, en elev i gröna klassen som inte pratar, men hon kan ibland med konkret material visa att hon har förstått. Jag gjorde bedömningsstödet till exempel. Att göra bedömningsstöd med en elev som inte förstår är jättesvårt. Men så skulle de peka på en siffra. Och då så hade ju siffrorna fysisk koppling siffra till antal och då fick hon plocka lika många kuber som det var på siffran i stället för att säga det då. (Berit)

> Har man språkbarriär, det blir så konkret så mycket lättare, då kan man lättare visa hur man tänkt, olika strategier, det hjälper så mycket mer tänker jag. (Adam)

> Samma sak med dem som är språksvaga, de som inte har grepp om språket, det blir svårt att förklara för dem på svenska och så kan de inte språket, hur kan man då göra? Jo då kan man ta fram laborativt material, då behöver man inte använda språk på samma sätt, man kan bara ta fram, visa med några enstaka ord och begrepp, liksom. På deras nivå. (Adam)

Det konkretiserande materialet blir alltså ett extra kommunikationssätt för elever med språkstörningar och för de elever som inte behärskar svenska i tillräcklig grad för att kunna på ett tillfredsställande sätt kunna förmedla sitt matematiska tänkande. Genom att utgöra ett relevant läro- samt kommunikationsmedel för ”vissa” elever blir det laborativa materialet ett avgörande inkluderande verktyg. Det konkretiserande materialet kan hjälpa att förverkliga en matematikundervisning som möter alla elevers skilda lärandebehov.

3.1.2 Laborativt arbetssätt som effektiv undervisningsstrategi i arbetet med alla elever

Det är intressant att i samtal med Berit och Adam kan man parallellt med det ovannämnda skönja ett annat perspektiv på laborativt arbetssätt. De verkar samtidigt framhålla att laborativt arbetssätt är betydelsefullt för alla elevers utveckling och lärande i matematik. Gunvor uttrycker det att ”Laborativt material låter elever få förståelse för det han gör på ett djupare plan”. Adam understryker att laborativt arbetssätt blir effektivt för alla elever oavsett deras individuella förutsättningar och begåvning:

> (…) och de som är överambitiösa, eller, förlåt, högpresterande, de får djupare förståelse samtidigt som det hjälper de lågpresterande, matematik blir mer konkret, mer tydligt för dem.

Enligt ovanför nämnda påståenden låter arbetssättet alla elever fördjupa sin matematiska förståelse och utveckla begreppsbildning inom ämnet. Adam berättar även om klassens arbete med positionssystemet:

> ”Och vi jobbade med det förra veckan och sedan körde vi ett spel kopplat till så där och det hjälpte ju så mycket, alltså de förstår, vissa började greppa vad det innebär med positionssystem, för en månad sen när vi började prata om positionssystem, ingen hade någon aning om vad det var. Av erfarenhet kan jag säga så här: jag har försökt prata om positionssystem utan laborativt material och det gick inte alls bra, de fattade ingenting av det jag sa men nu några veckor framåt så har de börjat förstå. De har börjat tänka på ett nytt sätt bara för att vi har jobbat på det viset.” (Adam)

Här dyker det upp ett nytt perspektiv på laborativt arbetssätt. Användning av det konkretiserande materialet leder till elevens ”aha-upplevelse”. Eleverna har enligt Adam börjat tänka på ett djupare plan men även på ett helt nytt sätt.

I lärarnas strävan att genom det laborativa arbetet fördjupa elevens matematiska förståelse framstår detta undervisningssätt som en oumbärlig länk i elevens lärprocess, ett konkretiserande inslag i det matematiska lärandet. Det laborativa arbetssättet ska binda samman det abstrakta och det mer konkreta, det spelar alltså en viktig konkretiserande roll i elevens begreppsbildning. Berit uttrycker det på följande sätt:

> Genom att jobba både konkret och teoretiskt så kan du tillgodose flera elever för en del behöver, det behöver sätta sig i fingrarna, kunskapen, för ibland teorin det är svårt att fånga för en del. Och jag tänker att om man jobbar både med siffror, bild, konkret material, då kan du faktiskt fånga in i stort sett alla. (Berit)

En abstrakt matematisk frågeställning i form av symboler kan bli mer begriplig och tillgänglig för elevens tänkande genom att uttryckas med konkreta medel, såsom i den av Berit beskrivna situationen:

> Jag hade en elev idag, hon fick en mattekluring: hon kunde inte räkna ut det, först när hon såg pengarna framför sig, när hon använde pengarna så kunde hon räkna ihop det.

Det konkreta material som kan upplevas med alla sinnen blir även i Saras uttalande till en viktig länk mellan den konkreta och den abstrakta matematiken:

> Och jag tror att just den biten gör alla, alla lär sig genom finmotoriken, någonting måste fastna: antingen färg eller form eller känslan när man delar och så *kopplar man det man har gjort till talet*. (Sara)

Bild och konkreta föremål omtalas som stöd för minnet, som ”hjälp för tanken att komma ihåg” (Berit). Både Berit och Adam menar att den konkret genomförda matematiska operationen kan bli elevens mentala föreställning av vad som har gjorts, en inre bild av en abstrakt matematisk operation eller av ett matematiskt begrepp:

> en tallinje som vi har jobbat med, det blir superkonkret, de hoppade, vi pratade om det idag också och vi lyckades börja räkna uppåt, lite svårt att till exempel börja på 15 plus 4, då räknar man från 15 och räknar upp till 4, de kan lära sig att visualisera, alltså ha det i huvudet, så jag tänker mig laborativt är fruktansvärt viktigt och det är som sagt för att konkretisera matematik. (Adam)

> Jag tänker också det här med bilder: bilder och konkret material blir också stöd för minnet och stöd för tanken att komma ihåg. (Berit)

Det är även Emma som lyfter det laborativa arbetssättets roll som en länk mellan det konkreta och det abstrakta tänkandet hos eleven. Hon nämner att fingerräkning är något hon vill hjälpa eleven ”att komma ifrån” och samtidigt ser hon hundrarutan som överlägsen ”klossarna” på grund av den förstnämndas mer abstrakta karaktär:

> ”och ibland kan jag tycka hundrarutan är bättre än fingrarna, att det är siffror de hoppar emellan” (Emma)

Samma lärare nämner att hon är noga med att elever inte fastnar i de konkreta representationerna. Hon vill som hon själv säger gärna ”hjälpa de vidare till nästa (underförstått ”mer abstrakta”- min kom.) steg”.

I alla de ovannämnda yttrandena kan man skönja syn på det laborativa arbetssättet som undervisningsmetod för både fördjupning och utveckling av alla elevers matematikkunskaper.

En av lärarna uttrycker dock även en farhåga om att inte alla pedagoger och lärare är medvetna om det laborativa arbetets betydelsefulla plats i elevens matematiska utveckling vilket även kan påverka elevens syn på egna räknastrategier:

> Det är någon (elev) som frågade på bedömningsstöd: får jag räkna på fingrarna? Absolut! Självklart! Det är också ett sätt att jobba konkret på. (Berit)

> En del säger så här: nu tog de kuber, nu fuskar de! Men det tycker jag inte och jag brukar säga det. (Berit)

I de intervjuades uttalanden kan vi också se att det laborativa arbetssättet uppfattas som ett långsiktigt projekt i lärarens arbete med klassen och ska betraktas samt planeras i långtidsperspektiv. Enligt både Emma och Adam behöver eleverna tränas i denna arbetsmetod vid återkommande tillfällen och under en längre tidsperiod för att detta arbetssätt ska kunna ge den tidigare nämnda fördjupade förståelsen och begreppsbildning i alla elevers matematiklärande. Adam ser kontinuitet i det laborativa arbetssättet som en förutsättning för att materialets symboliska dimension ska kunna uppfattas av eleven:

> (…) jag känner att vi fortfarande befinner oss i den första fasen, att de måste först äga materialet, bekanta sig med det för att kunna använda det i sitt matematiska tänkande. Om de inte förstår vad syftet med materialet är så kommer det nog inte bli något vettigt av att bara hålla på (…)

Det är även Sara och Emma som framhåller vikten av det kontinuerliga arbetet med det konkretiserande materialet:

> Jag använder laborativt hela tiden, jag vill att eleverna går till den nivån då de själva plockar, de har börjat göra det. Först och främst har jag använt det från grunden och om man använt något hela tiden och många gånger framför dem så kommer de att automatiskt tänka: där behöver jag, om det är addition: där behöver jag pengar eller klossar. (Sara)

> Laborativt är en träningssak, man behöver träna elever i det och det är en mognadsgrej hos eleverna att de behöver landa i det men de behöver också tränas i det, det är inte något som kommer på en gång, att de kan, de måste träna på att samarbeta. Det är ju också det som är så skönt när man följer en klass, att man kan skörda lite till slut, att om de har tränat hela ettan, så i tvåan kan man skörda det (…) (Emma)

Sammanfattningsvis lyfter flera av de intervjuade lärarna det laborativa arbetssättet som en effektiv undervisningsmetod i arbetet med alla elever genom att beskriva det som en nödvändig länk i varje elevs matematiklärande och samtidigt som ett betydelsefullt utvecklingsområde som alla elever behöver tränas i. Det är just denna kontinuerliga träning som i enlighet med lärarnas ord kan göra det laborativa arbetssättet till en effektiv och fruktbar undervisningsmetod.

3.1.3 Laborativt arbetssätt som ett viktigt inslag i en lärande gemenskap

Emma verkar i sitt sistnämnda påstående koppla det laborativa arbetssättet både till ett långsiktigt arbete och till elevernas samarbetsförmåga. Alla de intervjuade lärarna verkar associera det laborativa arbetet med det gemensamma lärandet eller ”den lärande gemenskapen”. Lärarna lyfter särskilt den lilla gruppen som en effektiv arbetsform i denna typ av arbete i matematik men betonar även vikten av helklassdiskussion inspirerad och ledd av läraren. Berit, Adam och Emma betonar att den typen av samarbete och kommunikation låter eleverna ta del av varandras tankesätt och räknastrategier.
Elevernas diskussion i kombination med det laborativa arbetssättet tas upp som en väg till en effektiv matematikundervisning. Gunvor, Adam och Berit verkar se dessa inslag som ett sätt att både förtydliga och fördjupa sin egen matematiska förståelse och lära av varandra. Det är

inte enbart räknafärdigheter och faktakunskaper som utvecklas hos eleven utan även resonemangsförmågan och begreppsbildning. Gunvor konstaterar:

> Jag lyfter gärna när en elev kan någonting och kan förklara det för sina kompisar. Det befäster hans kunskaper och kan fördjupa kompisarnas förståelse.

> För mig praktiskt arbete med material, med gruppdiskussioner i matematik, det är fruktansvärt viktigt. (…) elever behöver diskutera laborativt material för att kunna visa och uttrycka hur de tänker (…). Jag har ju läst om skillnader mellan USA och Japan. Varför Japan har bättre resultat i matten är därför att de jobbar mer med diskussion, mycket att de diskuterar matematik och får djupare förståelse, där kommer det laborativa materialet också in. (Adam)

> att elever många gånger kan lära sig hur man ska göra och de gör som man ska men om du frågar varför gör du på det sättet så har de inte en aning och därför så tänker jag att det konkreta materialet kan konkretisera och förtydliga varför man gör som man gör. (Berit)

I de ovanför nämnda citaten blir det konkretiserande materialet ett verktyg för eleven och läraren samt elever sinsemellan att uttrycka sina olika tankesätt och problemlösningsstrategier till varandra. Det laborativa materialet blir ett ytterligare kommunikationssätt mer tillgängligt och begripligt för eleven än det abstrakta matematiska språket. Som Adam beskriver detta:

> Det är ibland svårt att uttrycka hur man tänker i ord och därför kommer det laborativa in känner jag. Vi kan bara plocka, visa och flytta, då blir det så mycket mer, så mycket lättare och man behöver inte ställa till det med så många jobbiga ord heller.

Det laborativa materialet hjälper eleven att konkretisera sitt abstrakta tänkande och förmedla det till andra vilket leder till en mer diversifierad och givande diskussion om olika sätt att lösa matematiska problem:

> (…) det blir mer konkret, man har möjlighet att visa, man tänker på flera olika sätt än på ett och samma sätt hela tiden. (Adam)

Emma anger som sitt huvudsyfte med det laborativa arbetssättet att just ”låta eleven få möta uppgiften på olika sätt”. Det är intressant att hon som den enda lyfter även enskilt arbete med laborativt material som ett givande alternativ. Hon diskuterar EPA-modellens (står för ”enskilt, par och alla”) roll i sitt laborativa arbete med elever (Kagan & Stenlev, 2016). De varierade arbetsformerna: enskilt arbete, arbete i par och i helklass blir enligt hennes erfarenhet en bra utgångspunkt för det laborativa arbetet med problemlösning.

3.1.4 Laborativt arbetssätt som en bedömningsstrategi

Det är Berit och Adam som verkar betona det laborativa arbetssättets potential som bedömningsverktyg. Båda lyfter dock samtidigt att detta även kan innebära en stor utmaning. För att det laborativa arbetet ska kunna fungera som bedömningspraktik behöver eleverna först som Adam säger ”landa” i arbetssättet och få många tillfällen att prata och lyssna på varandra. Själv säger han sig föredra pararbete när huvudsyftet med aktiviteten är bedömning av elevernas kunskaper och förmågor. Som han själv förklarar:

> Det beror på elevgruppen, om en grupp tillåter att prata och lyssna på varandra så kan man absolut köra i grupp men är det en elevgrupp där de behöver mycket utrymme så kör man i par så att det inte tar lika mycket tid när de pratar emellan.

Berit tar helt avstånd från möjligheten att bedöma eleven vid en laborativ aktivitet i helklass. Hon menar att arbetsformen är helt avgörande i detta sammanhang och det som fungerar bäst

är antingen arbete i smågrupper eller i halvklass. Det är inte enbart de unga elevernas ovana att samarbeta och föra självständiga diskussioner som kan innebära en utmaning utan även lärarens begränsade möjligheter att uppmärksamma alla elevers lärande:

> (…) I en liten grupp hinner du se alla på ett annat sätt än när du har 25 elever. (Berit)

Både Adam och Berit lyfter att det laborativa materialet låter läraren få syn på elevens tankesätt och räknastrategier. Det synliggör och konkretiserar elevens lärprocesser. Det som annars skulle kanske vara omöjligt för läraren att uppfatta blir synligt och förståeligt:

> Man får en möjlighet att göra en mer noggrann bedömning också för då har man möjlighet att se och höra vad de gör (…), hur de tänker. (Adam)

> Det (arbetssättet) låter mig lyssna hur de använder materialet, vilka dialoger som uppstår var, hur de tänker, när man ser hur de flyttar på klossar då kan man se vad som händer i deras huvud (Adam)

> Du kan verkligen se hur eleven tänker. För det kan vara svårt för eleven att beskriva så på något vis så kan du bedöma lättare också konkret. (Berit)

Både Adam och Berit berättar att de vid elevernas laborativa arbete i smågrupper och par rör sig i klassrummet, betraktar elevernas agerande och lyssnar till de diskussioner som uppstår vilket ur deras perspektiv blir ett effektivt verktyg i den formativa bedömningen av elevernas matematikkunskaper och -förmågor. Detta arbetssätt menar de ger dem en möjlighet att inte enbart se och bedöma om elevens svar blir rätt eller fel utan även förstå hur eleven har kommit fram till svaret. Bedömningen blir mer ”noggrann” som Adam benämner detta eftersom den ger läraren ett bredare perspektiv på elevens utveckling och lärande. Detta bedömningssätt kan även tydligare indikera var eleven befinner sig i sitt matematiklärande. Denna typ av bedömning leder inte enbart till tydligare kartläggning av elevens kunskaper utan även skapar bättre möjligheter till att föra eleven vidare i hennes lärande. Båda lärarna menar att bedömning med hjälp av laborativa material många gånger hjälper att reda ut elevens eventuella missuppfattningar och erbjuda mer effektiva problemlösningsstrategier. Som Adam säger:

> Om en av dem (elever) bara skulle sitta och skriva på ett papper, man vet inte riktigt, du vet inte hur de tänker, du ser vilket svar de skriver, men du vet inte på vilket sätt den här personen kom fram till det svaret, varför det blir fel, varför det blir rätt. Det blir väldigt svårt, men när man får dem att prata, visa, då får du liksom så mycket annat.

Eller som Berit berättar:

> ibland känner du: nej den här personen har inte alls förstått. Då måste vi förtydliga, då måste vi tänka om på ett nytt sätt.

Bedömning via det laborativa arbetssättet blir även till en möjlighet att möta de olika elevernas skilda lärandebehov. Lärarna växlar mellan två skilda förhållningssätt till eleven. Dels iakttar de elevens agerande och samtal dels intar de en deltagande roll genom att ställa frågor och ”inflika små kommentarer” som Berit uttrycker det. Hon berättar att det laborativa arbetet hjälper henne på ett bättre sätt följa upp elevernas utveckling. De uppgifter elever eller elevgrupper får kan anpassas och varieras utifrån de lärandes förmåga och kunskaper:

> Du märker kanske att en liten grupp har det alldeles för enkelt då får man ta svårare i stället och utmana dem lite grann (…) och om du hör barnen spekulera, så kan du slänga en liten fråga mitt i som inspirerar dem i tankarna. (Berit)

> Eller om de leker affär med pengar och så ser du att de har förstått det här med addition så frågar du kanske: vad händer om du behöver köpa tre likadana saker? Hur räknar du då? Så utmanar du dem lite. (Berit)

I ett av de ovanförnämnda citaten lyfter Adam vikten av att eleverna hinner bekanta sig med det laborativa materialet innan det kan användas i bedömning av deras kunskaper.

3.1.5 Laborativt arbetssätt är ”att leka matematik”

Alla de intervjuade lärarna framhåller bilden av laborativt arbetssätt som ett underhållande inslag i matematiklärandet. Både Berit och Adam talar om vikten av det lustfyllda lärandet och i detta sammanhang låter de det konkretiserande materialet ”leka fram elevens kunskaper” (Berit). Berit berättar om tillfället då hon hade arbetat med volymbegreppet i matematik genom att låta eleverna mäta ut vatten med hjälp av olika köksmått. Hon berättar hur eleverna med fullt engagemang utforskade ämnet genom det gemensamma experimenterandet och att ingen av dem lämnade klassrummet utan att ha förstått vad volym är för någonting.

Både Emma och Berit menar att det är just det laborativa arbetssättets engagerande karaktär som får eleven att lära och gör hennes kunskaper bestående. Alla de intervjuade verkar vara överens om att den underhållande dimensionen av laborativt arbetssätt kan på ett bra sätt fånga elevens uppmärksamhet och involvera både de hög- och lågpresterande eleverna i undervisning. Detta kan ha i sin tur en avgörande betydelse för det som betecknas ”det långsiktiga” och även ”det livslånga lärandet” i matematiken.

> Så att det fångar ju. Även om de är duktiga i matte så kan du fånga dem med konkret material för de tycker att det är roligt med det praktiska. (Berit)

> Även om en elev inte har behov av laborativt material så kan ju matematiken blir väldigt tråkig i längden och de kan liksom tappa lusten att jobba. Där kommer laborativt in, där har man mycket mer. (Adam)

Berit berättar om ett tillfälle då laborativt arbetsmoment blev till ett givande lärandetillfälle för alla elever i klassen:

> Eleverna fick slå med tärning och ta så mycket pengar som tärningen visade och så fort de kunde så fick de växla till en större peng och så fortsatte de så tills de fick hundra. De tyckte det var otroligt roligt och så satt de fyra och fyra så det blev som ett spel. Även de som var jätteduktiga i matte tyckte det här var superroligt.

Det laborativa arbetssättet kan genom sin underhållande karaktär väcka intresset för matematiken och låta behålla detta intresse. På det sättet beskrivs det laborativa arbetssättet i opposition mot arbetet med läroboken som här konstrueras som något svårt, monotont och ensidigt:

> Man kan göra den (matematiken) rolig och konkretisera och variera den, många tappar lust för matematiken dels för att det är svårt att förstå men även att man går in i klassrummet och det är samma sak hela tiden, du går in i klassrummet, plockar fram boken och så gör du tal efter tal efter tal efter tal. (Adam)

I de sammanhang då lärarna diskuterar det laborativa arbetet som lek och underhållning tenderar de även understryka det sinnliga i detta arbetssätt. Emma, Adam, Sara och Berit verkar överens om att arbetssättets betydelsefulla styrka är just att det kan involvera elevens

alla sinnen. Den sinnliga och fysiska dimensionen stimulerar enligt dem elevens lärande och fördjupar hennes förståelse:

> (…) de behöver göra med kroppen för att förstå. (Berit)
>
> Jag tycker de lär sig mer när de får jobba mer med händerna, bygga eller att de får forma (…) (Emma)
>
> (…) att de faktiskt själva får känna och se hur det funkar, att man kan plocka, det är ta bort, till exempel att jag har ett visst antal klossar, sedan flyttar jag bort dem, det blir så konkret, de ser ju verkligen och jag tänker mig, det blir en helt annan bild och då förstår de mycket bättre. (Adam)
>
> (…) någonting måste fastna: antingen färg eller form eller känslan när man delar och så kopplar man det man har gjort till talet. På något sätt så lär man sig av det. Så det är väldigt nyttigt i alla fall, för jag tror på det väldigt starkt. (Sara)

Lärarna verkar betrakta det laborativa arbetssättet som en lustfylld kreativ aktivitet som involverar elevens intressen och engagemang. Det lekfulla och lustfyllda i det laborativa arbetssättet kommer till uttryck även via de elevnära teman och material som eleven känner igen från sin vardag.

Berit berättar om projekt där läraren tillsammans med elever arbetade just med elevnära teman sådana som affär och café där eleverna hade mycket aktiv roll. I denna lustfyllda fantasifulla miljö får eleverna uppleva matematiken ”på riktigt”, som Berit uttrycker detta:

> Just att leka matematik med konkret material och med konkreta saker vi använder varje dag. Det jobbade vi jättemycket med. Och sedan så blev det svårare och svårare affärer och en utav klasserna, de ordnade ett café. Då hade de delat ut pengar och sedan så hade de bakat på hemkunskapen och sedan så hade de café och så fick andra elever komma och köpa i deras kafé och då så blev det så riktigt. Konkret! Man kan göra mycket!

Berit berättar hur hon försöker inkludera i sin undervisning material från elevens omedelbara vardagliga omgivning. I de ovanförnämnda lekarna användes den frukt som eleverna hade med sig hemifrån och olika prislappar sattes utifrån elevens egna idé på olika sorters frukt. I kaféet såldes å sin sida som nämnt i citatet av eleverna bakade bullar. Läraren verkar fästa stor vikt vid de använda föremålens personliga (ur elevens perspektiv) och verklighetsnära karaktär. Hon nämner även vardagsföremål i klassrummet, djur och pengar som sådana elevnära laborativa material:

> (…) man ska använda mycket av vad man är van vid och pengar, det lär man sig väldigt tidigt; (Berit)
>
> Jag tänker: det blir också konkret material eller om man använder och men djur: jag har två kossor och två tuppar: hur många ben har de tillsammans? och då kan de antingen rita upp dem eller visa bilder När vi jobbade med multiplikation så använde vi saker i rummet: vi har fyra bord, alla borden har fyra ben. Hur många ben finns det i rummet? (Berit)

Även Gunvor uppmärksammar de föremål som finns i klassrummet som konkretiserande material lämpligt att använda i de matematiska diskussionerna med elever. Hon nämner mönster på gardinerna samt regelbundenhet med vilken man sätter upp elevernas bilder på väggen som laborativt material möjlig att använda i undervisningen. Elevens omedelbara omgivning ska uppmärksammas och tas till vara i matematikundervisning och skapa ett utrymme för barnets matematiska tänkande. Även Gunvor tar upp möjligheten att använda elevens egentillverkade material såsom elevens målningar och föremål skapade på slöjdlektioner. Denna mer elevnära syn på laborativt material i skolan skulle enligt henne

även kunna bidra till en ökad ämnesintegrering inom matematikundervisning vilket hon menar behövs:

> Matematik är för ensamt som ämne, det borde egentligen byggas ihop med mönster, musik, rytm, även hur man lägger upp scheman alltså olika regelbundenheter och mönster. Till exempel på de här gardinerna, eller hur de här bilderna hänger. Eller hur mycket matematik man kan få in i slöjd, i bild rent praktiskt, det gyllene snittet i bild till exempel

Sammanfattningsvis är det flera inslag i lärarnas uttalanden som skildrar laborativt arbetssätt som en lustfylld och lekfull aktivitet. Detta arbetssätt sägs ha underhållande och motiverande påverkan över eleven, den ska bygga på elevens intressen och förförståelse och helst bygga på elevnära material som även kan ha personlig betydelse för eleven.

3.1.6 Laborativt arbetssätt som en väg till variation i matematikundervisning

Ett frekvent återkommande tema i alla de intervjuade lärarnas uttalanden är variation. Begreppet ”variation i matematikundervisningen” får en starkt positiv innebörd i deras utsagor. Denna ska öka elevens motivation genom att bland annat göra matematiken till ett lustfyllt ämne. Variationen via användning av laborativt material och variationen inom själva laborativa arbetet ska även hjälpa läraren att nå alla elever och deras skilda lärostilar. Den ska slutligen även bli till nytta för alla elevers fördjupade förståelse inom matematik. Berit och Sara beskriver laborativt material som ett oumbärligt inslag i den varierade matematikundervisningen:

> Och jag tänker att man jobbar både med siffror, bild, konkret material, då kan du faktiskt fånga in i stort sett alla, genom att blanda in alla moment. (Berit)

> För att jag tror att vi är olika i vårt inlärningssätt, vissa lär sig via bild, vissa lär sig teoretiskt genom att läsa och skriva och räkna, och det finns andra som lär sig via finmotoriken (Sara)

Eller som Emma klär det i ord:

> Jag försöker variera (…) jobba enskilt i böcker eller så spela spel tillsammans, jobba med matten på olika sätt, inte bara med boken, sedan Ipads har de ju också matten på (…) de ska få möta uppgiften på olika sätt. Olika elever lär sig på olika sätt… det är för variationen också. Jag tror att man når flera elever.

I Saras uttalande blir det varierade utbudet av laborativt material ett sätt att fördjupa elevens förståelse:

> (…) det finns också andra material *så att de förstår*, till exempel pengar och klossar kan man räkna med dem, båda kan man använda till positionssystemet, så att de förstår också kopplingen när man varierar. En krona kan vara ental: en krona, en kloss, det är fortfarande samma sak.

Enligt Adams ord blir det varierade laborativa arbetssättet en väg till elevens ökade motivation:

> För att jobba med stenciler, det blir tråkigt på lång sikt och det blir inte lärande på samma sätt för jag tänker mig, ta till exempel (…). Där kommer laborativt, där har man mycket mer alternativ

Adam verkar uppleva oro för att matematikboken kan få för stor betydelse i matematikundervisning. Där ser han det laborativa materialets viktiga roll i att bli ett relevant och givande alternativ:

> Vi försöker allt mer gå ifrån matteboken (…). Vi har försökt… vi försöker introducera nya spel, tallinjen, mycket på tavlan att vi går igenom tillsammans, vi försöker ha diskussion i klassen.

Berit, Gunvor och Emma verkar förknippa det effektiva sättet att variera matematikundervisning med elevens öppna tillgång till laborativa material:

> Jag tycker att konkret material ska finnas fritt att användas just i år ett i matten: du ska ha centikuber, du ska göra tiokamratsband, så att man hela tiden kan variera arbetssättet. (Berit)
>
> Elever ska kunna använda allt material när de behöver det och det ska vara varierat (Gunvor)
>
> Några hämtar ofta hundrarutan och några hämtar bara hundrarutan och det ska vara okej att man serverar många olika och så får de välja något som passar dem. Sedan så brukar de efter ett tag lära sig vad de gillar att räkna med. (Emma)

Den erbjudna variationen av det laborativa materialet blir i de sistnämnda uttalandena till ett försök att individualisera undervisning genom att låta eleverna välja det material som bäst passar deras lärandebehov. Elever ska få vara fria att hämta materialet när som helst de upplever att de behöver det och det är deras eget omdöme om vad som är lämpligt material vid respektive tillfälle som får stor betydelse här.

3.2. Hur arbetar de intervjuade lärarna med laborativt material i matematik?

3.2.1 Lärarnas medverkan genom introduktion av det erbjudna laborativa materialet

Alla de intervjuade lärarna uttrycker att det är viktigt med deras medverkan i det laborativa arbetet. Alla verkar överens om att det laborativa materialets innebörd och roll först ska introduceras för alla elever, antingen i mindre grupper eller i helklass.
Gunvor lyfter introduktion av det laborativa materialet som ett oumbärligt moment i det laborativa arbetet. Läraren ska modellera, alltså demonstrera den ämnade användningen av det nya laborativa materialet framför klassen:

> (…) man ska alltid introducera materialet först, sedan använder man det.
> Jag använder konkret material vid genomgångar, genom att modellera, inte fel att använda sig av en duktig elevs hjälp

Adam förklarar även varför han anser denna introduktion nödvändig:

> Hade jag bara plockat fram stavarna och klossarna så hade de bara en viss, bara en liten del av klassen hade greppat: jaha det är en tia, och det här en etta, många… de skulle inte förstå, de skulle kanske tänka: de är olika långa kanske. Därför är det viktigt att man går igenom vad materialet är, vad det är för material och vad det används till. Därför tänker jag: det är bra att börja i helklass, tills de verkligen förstår materialet innan de använder det., innan de använder det själva.

I enlighet med Adams ord blir lärarens medverkan via introduktion av det laborativa materialet helt central för arbetets goda effekter på elevens lärande. Materialets innebörd och funktion ska introduceras av läraren, diskuteras i helklass och helst även tydliggöras på tavlan. Detta betonar Sara och Emma i sina uttalanden:

> Har du också instruktioner på tavlan, det kan vara bra. För det kan hjälpa, de kommer kanske inte komma ihåg hela instruktionen från början, och därför kan de få hjälp på tavlan. Man kanske skriver upp på tavlan. (Emma)

> För de ser framför sig att jag klistrar på tavlan och hur jag tänker, sedan välkomnar jag olika metoder: hur tänker ni? Även fel (svar). Jag tar det på tavlan: varför är det fel? Diskutera felet! (Sara)

Vad är centralt i lärarens introduktion av materialet? Adam introducerar för sina elever ”vad materialet är, vad det är för material och vad det används till” (Adam). Både Berit och Sara lyfter ett flertal gånger att läraren även ska betona kopplingen mellan materialets fysiska utformning och dess abstrakta innebörd:

> Men så skulle de peka på en siffra. Och då så hade ju siffrorna fysisk koppling siffra till antal och då fick hon plocka lika många kuber som det var på siffran i stället för att säga det då. (Berit)

> Det man kan se är att med konkret material kan man lättare se hur eleven tänker: till exempel med uppgiften 6-4 så kan du se hur han tar bort, du tar bort 4 och så har du 2 kvar. (Berit)

> Men det finns också andra material så att de förstår. Till exempel pengar och klossar kan man räkna med, båda kan man använda till positionssystemet, så att de förstår också kopplingen när man varierar. En krona kan vara ental: en krona en kloss och talet ett det är fortfarande samma sak. De ska även behålla visst samma material för det är också trygghet att de kan. (Sara)

I enlighet med Berits ord försöker hon i undervisningsprocessen göra kopplingar mellan de konkreta föremålen och de matematiska symbolerna. Talen ska kopplas av eleven till antalet klossar. Hennes medverkan ska även hjälpa att synliggöra relationen mellan det laborativa materialet och ett skriftligt matematiskt problem i subtraktion ”6-4”. Sara förklarar hur sådana laborativa material som pengar och klossar kan bli multipla representationer för ett tal. Det är variationen av de olika matematiska uttryckssätten som hon använder för att synliggöra kopplingen mellan det konkreta och det abstrakta. Därmed uppnår eleven djupare förståelse av innebörden i det abstrakta matematiska språket, just i det citerade uttalandet om talet ”1”.

Berit lyfter även hur relationen mellan det konkretiserande materialet och det abstrakta matematiska begreppet ”multiplikation” kan tydliggöras för elever under en matematiklektion:

> När vi jobbade med multiplikation så använde vi saker i rummet: vi har fyra bord, alla borden har fyra ben. Hur många ben finns det i rummet?

Emma, Adam och Sara understryker att det laborativa arbetet behöver betraktas och planeras i långtidsperspektiv. Lärarna säger sig arbeta laborativt vid regelbundet återkommande tillfällen och i alla matematikområden.

Det framgår av Adams och Emmas ord att de tränar sina elever i det laborativa arbetssättet:

> Laborativt är träningssak, man behöver träna elever i det och det är en mognadsgrej hos eleverna att de behöver landa i det men de behöver också tränas i det, det är inte något som kommer på en gång, att de kan, de måste träna på att samarbeta. Det är ju också det som är så skönt när man följer en klass, att man kan skörda lite till slut, att om de har träna hela ettan, så i tvåan kan man skörda det (Emma)

> Jag känner att vi fortfarande befinner oss i den fasen att de måste först äga materialet för att kunna använda det. Om de inte förstår vad syftet med materialet är så kommer det nog inte bli något vettigt av att bara hålla på. (Adam)

Det långsiktiga laborativa arbetet ska gradvis leda till elevernas fördjupade förståelse av syftet med materialets användning och därmed till ökad självständighet i användning av materialet.

Sara lyfter att hon har använt sig av samma sorters laborativa material under elevernas två första år i grundskolan. Att använda sig enbart av pengar och tiostavar fördjupar enligt henne elevens förståelse av de olika materialens syfte och innebörd samtidigt som det stärker elevens självständighet i det laborativa arbetet. Elevens kännedom om respektive laborativa material ökar, vilket hjälper henne anpassa materialet efter det matematiska problemets karaktär:

> Först och främst har jag använt det från grunden och om man använt något hela tiden och många gånger framför dem så kommer de att automatiskt tänka: där behöver jag, om det är addition, där behöver jag pengar eller klossar eller något att konkret räkna med för att komma till svaret. För de ser framför sig att jag klistrar på tavlan och hur jag tänker.

Gunvor kommer med ett intressant perspektiv som inte verkar lyftas av någon annan lärare. Hon arbetar med matematiken som med ett naturligt inslag i elevens vardag och omgivning. Matematiken finns i vår vardag och väntar på att bli upptäckt. Därför menar Gunvor försöker hon uppmärksamma eleven på de matematiska mönster och strukturer som kan urskiljas i olika situationer och sammanhang. Hon talar om musiken, konsten och de olika inslagen i inredning som ett viktigt utrymme som kan hjälpa att skapa kopplingar mellan det abstrakta formella och den konkreta dimensionen i matematiklärandet:

> Matematik är för ensamt som ämne, det borde egentligen byggas ihop med mönster, musik, rytm, även hur man lägger upp scheman alltså olika regelbundenheter och mönster. Till exempel på de här gardinerna, eller hur de här bilderna hänger. Eller hur mycket matematik man kan få in i slöjd, i bild rent praktiskt, det gyllene snittet i bild till exempel.

3.2.2 Lärarens medverkan via medveten planering av elevens progression

Både Berit och Sara uttrycker att laborativt arbetssätt hjälper dem att bedöma och följa upp elevens lärande och utveckling i matematik. Utifrån den bedömning som sker vid varje lärandetillfälle planerar Berit den kommande undervisningen för att kunna föra elevens lärande vidare:

> (…) varje morgon hade vi en fruktstund, så eleverna la sina frukter i en korg och de hade med sig olika frukter. Sedan gjorde vi en prislista så då blandade vi in pengar också så att äpplena kostade fyra kronor och apelsiner fem men då så fick de köpa sin frukt varje dag. Så först fick de jämna pengar och sedan så kunde vi säga: den här eleven börjar kunna det här. Då fick de också växla Just att leka matematik med konkret material och med konkreta saker vi använder varje dag. Det jobbade vi jättemycket med. Och sedan så blev det svårare och svårare affärer.

Hon diskuterar även den progression som kan ske under en och samma lektion då man kanske inleder arbetsområdet med en lättare uppgift för att sedan erbjuda mer avancerade matematiska problem:

> Eleverna fick slå med tärning och ta så mycket pengar som tärningen visade och så fort de kunde så fick de växla till en större peng och så fortsatte de så tills de fick hundra.

Eller i en aktivitet där en additionsuppgift förvandlas av läraren till ett problem inkluderande multiplikation. På det sättet möter eleven en större utmaning:

> Och till någon elev kan man säga: vad händer om du köper tre likadana saker? Vad händer då? Så att även multiplikation kan komma in. (Berit)

Sara berättar hur hennes konsekventa användning av färger i kombination med tiostavar samt matematiska symboler har blivit grund för elevernas progression mot allt mer avancerat matematiskt tänkande:

> Sedan använder jag också färger, om jag skriver talet 23 så skriver jag alltid entalet med grönt, tiotalet alltid med blått, hundratal alltid med rött och det är Montessori. Först lärde vi från början de här färgerna i kombination med tiobasmaterial: de fick bygga upp talen med kuber och stavar på pappersark i olika färg. Nu när vi har lärt oss uppställning då vet de att tre och fyra ska stå under varandra. Från färgerna kommer de veta: men de är tiotal eller ental.

Sara har använt tiobasmaterialet både vid arbetet med grundläggande taluppfattning i årskurs ett och mer avancerade algoritm vid addition och subtraktion. Det konkretiserande materialet och de använda färgernas symboliska innebörd har utgjort en röd tråd i undervisningen och en viktig grund som elevernas egna matematiska meningsskapande kunde förankras i. De färger som hon från början har använt för att markera de olika talens plats i positionssystemet spelar fortfarande en viktig roll för elevernas matematiska förståelse men kan även tas bort ibland. Enligt Sara blir det ett sätt att hjälpa eleven komma ett steg vidare i sitt lärande. Utifrån Vygotskijs teori om den proximala utvecklingszonen skulle man kunna se Saras användning av färger som ett försök att skapa scaffoldning, alltså en sorts stöttor som från början möjliggör elevens progression inom den proximala utvecklingszonen men som gradvis spelar ut sin roll och behöver läggas åt sidan (Vygotskij, 2001).

Sara berättar hur hon gradvis försöker tona ner de symboliska färgernas roll vid laborativt arbetet och hon gör det utifrån elevernas ökande förtrogenhet med positionssystemet:

> Och senare skriver jag bara med svart så att de lär sig inte bara via färg, så att de förstår.

3.2.3 Frågornas roll i lärarens medverkan

Både Berit och Sara verkar se frågor som ett sätt att medverka i elevens laborativa arbete och att föra hennes tänkande vidare. Såsom Berit säger:

> (…) jag jobbar ju mycket i smågrupper, du kan delta i varje liten diskussion än du kan i helklass och om du hör barnen spekulera så kan du slänga en liten fråga mitt i som inspirerar dem i tankarna.

Även Sara berättar att hon brukar gå runt bland eleverna, observera deras arbete och ställa frågor:

> (…) hur gör du frågar jag då. Jag gör så här. Varför gör du så här? Ofta tror de då att de gjort fel men det är inte så utan jag vill att de ska reflektera.

> För de ser framför sig att jag klistrar på tavlan och hur jag tänker, sedan välkomnar jag olika metoder: hur tänker ni? Även fel svar. Jag tar det på tavlan: varför är det fel? Diskutera felet! och så kommer de förstå så småningom.

Här återkommer vi till den lärande gemenskap som vi har diskuterat i de tidigare intervjuresultaten. Sara skapar en lärandemiljö där alla frågor och funderingar från eleverna är välkomna oavsett deras matematiska korrekthet. Alla tankesätt och funderingar ska synliggöras och belysas för att eleverna tillsammans ska kunna bygga upp sin matematiska förståelse.

Sara tar även upp hur hon använder elevernas egna frågor för att hjälpa dem utveckla sin problemlösning och för att stärka elevernas metakognitiva förmåga samt reflektionsförmåga:

> Så om de ställer frågan, jag kan inte: vad är det du inte kan och då börjar de reflektera lite vad det är de inte kan. Då är de tvungna att kolla och gå igenom uppgiften: vad är det de inte kan. Särskilt när de kommer till mig: jag kan inte lägga ihop talen. Då går de och reflekterar en gång till så det jag gör är att väcka eftertanke.

3.2.4 Elevens självständiga användning av laborativt material

Samtidigt som lärarna berättar att de aktivt medverkar i det laborativa arbetet som sker i matematikklassrummet lyfter de även att eleverna ska ha fri och i stort sett obegränsad tillgång till det laborativa materialet som finns att erbjuda. Såsom Berit konstaterar:

> Jag tycker att konkret material ska finnas fritt att användas just i år ett i matten: du ska ha centikuber, du ska göra tiokamratsband, så att man hela tiden kan (jobba med detta).

Gunvor och Sara som båda säger sig inspirerade av Montessori-pedagogiken tycker att elevernas breda tillgång till laborativt material är en självklarhet i deras klassrum**:**

> Jag tycker som i Montessori att miljön är viktig. Elever ska kunna använda allt material när de behöver det och det ska vara varierat (Gunvor).

Sara konstaterar likt Gunvor:

> Jag använder laborativt hela tiden, jag vill att eleverna går till den nivån då de själva plockar, de har börjat göra det. Jag är mycket Montessori-inspirerad så redan från början har jag använt konkret material hela tiden. Det finns basmaterial som de ska kunna använda så att de själva går och plockar från den.

Hon visar flera lådor fyllda med olika sorters laborativt material som eleverna fritt får använda sig av vid problemlösning. Emma associerar elevernas fria tillgång till laborativt material med deras olika lärostilar:

> (…) sen även under arbetsgång att det laborativa ska vara tillgängligt så att de vet var det finns, inte så att jag behöver ta fram det och servera utan att behöver de klossar att räkna med eller om de behöver tiobas så ska de bara kunna gå och hämta, det ska inte vara svårt för dem, det ska inte vara något besvär alltså det ska vara självklart för att kunna få hjälp så dels vid genomgångar men även senare, det är för vissa barn beroende på deras individuella lärostil.

Adam, Emma och Sara menar att de gör det laborativa materialet tillgängligt för eleverna för att möjliggöra deras ständiga progression mot en ökad självständighet. Emma är den av lärarna som tydligast verkar påpeka vikten av elevens självständighet vid användning av laborativt material. Det är framför allt vid introduktion av ett nytt matematikområde som hon instruerar och vägleder elevernas arbete för att därefter låta dem arbeta på egen hand:

> Jag tänker dels att jag försöker inleda med något laborativt, nya teman innan man går på det mer teoretiskt att de får testa på det laborativt men sen även under arbetsgång att det laborativa ska vara tillgängligt så att de vet var det finns

Det är även andra delar av hennes uttalanden som kan bekräfta detta tillvägagångssätt. Hon är även noga med att betona elevens frihet att välja bort det laborativa arbetssättet helt.

> För en del elever tror jag absolut kopplar på en gång, bara direkt med kanske siffror eller vad det är, så att man når flera elever så att de får testa laborativt också men så måste man ha valmöjlighet att vissa behöver inte och då ska det vara okej också...

Här återkommer vår fråga från första resultatdelen av mitt arbete: ska det laborativa arbetssättet rikta sig till alla eller enbart till vissa elever, alltså de som upplever svårigheter i matematiklärandet? Emma verkar se det laborativa materialet som ett läromedel för de ”svagare” eleverna snarare än som ett effektivt undervisningsverktyg i arbetet med alla elever oavsett deras förkunskaper. En stor del av det laborativa arbetet verkar ha en frivillig karaktär. Den verkar inte spela samma centrala roll i Emmas undervisning som den verkar göra i Saras och Adams arbete:

> (…) de väljer ju själva, de hämtar det själva, sedan kan det vara när jag inleder så visar jag ju hur de ska… jag berättar ju hur de ska använda från början, men ibland är det inte att de måste men att jag säger: till det här får ni använda tiobasmaterialet om ni vill, klockorna finns där bak så att jag ändå berättar igen var det finns. (Sara)

> Några hämtar ofta hundrarutan och några hämtar bara hundrarutan och det ska vara okej att man serverar många olika och så får de välja något som passar dem. Sedan så brukar de efter ett tag lära sig vad de gillar att räkna med. (Sara)

Eleverna får fatta flera viktiga beslut vad gäller det laborativa arbetet på egen hand. De bestämmer både i vilket undervisningsmoment och vilken sorts material de använder.

4 DISKUSSION

4.1 Hur ser lärarna på det laborativa arbetssättet i matematik?

4.1.1 Laborativt arbetssätt som ett undervisningssätt för alla elever

De intervjuade lärarna verkar se det laborativa materialet som ett effektivt verktyg i matematikundervisning för alla elever även om de starkt betonar dess särskilda betydelse för elever i behov av särskilt stöd i ämnesundervisningen. De verkar uppfatta det laborativa arbetssättet som en oumbärlig länk i elevens matematikutveckling, en grund som det fortsatta lärandet kan byggas upp på. Adam, Berit och Gunvor nämner fördjupad matematisk förståelse som en viktig effekt av detta arbetssätt. Via det konkretiserande materialet får eleven en möjlighet att skapa sig en egen och djupare förståelse av det abstrakta matematiska begreppet. Genom att få använda det konkretiserande materialet kan eleverna upptäcka de matematiska procedurerna och de matematiska begreppen som begripliga och meningsfulla, såsom

Pietersen samt D´Angelo & Illiev konstaterar i sina studier (Pietersen, 2006; D´Angelo & Illiev, 2012).

Lärarna påstår även att den konkreta dimensionen i matematiklektionerna låter eleverna att få en ”aha-upplevelse”, alltså se de diskuterade frågorna på ett nytt sätt. Yook och Loong nämner just liknande moment i elevens lärande som en viktig förutsättning för eleven att ”komma vidare i sin matematikutveckling” (Yook & Loong, 2014, s. 10). Lärarna verkar i detta sammanhang dela en bild av det laborativa arbetssättet som en oumbärlig länk i elevens läroprocess. Upprepade gånger återkommer i deras uttalanden bilden av det laborativa materialet som en länk mellan det konkreta och abstrakta och mellan elevens egna tänkande och det abstrakta formella matematiska tänkandet. Samtidigt nämner en av lärarna (Emma) att hon gärna vill hjälpa eleverna komma vidare till mer abstrakta sätt att lösa matematiska problem på. Detta inslag kan också tyda på att lärandet får en dynamisk dimension, det betraktas som en process bestående av flera moment som läraren ska vägleda sina elever igenom.

Utifrån Bruners teori (1960) om de olika steg som barnet går igenom i sin matematiska begreppsbildning behöver eleven först få använda det laborativa materialet enligt lärarens hänvisningar och vägledning, därefter går hon över till bildliga och skriftliga representationer för att sist komma till det mest abstrakta symboliska sättet att representera sitt matematiska tänkande på det matematiska språket. Det är just via dessa moment som det laborativa materialet enligt Bruner kan binda samman det konkreta med det teoretiska och högt abstrakta (Bruner, 1960). Med Hunt, Nipper och Nash ord blir det konkretiserande materialet till ”the bridging construction” mellan den formella och den informella matematiska kunskapen (Hunt, Nipper & Nash, 2011, s. 2). Med förankring i de konkreta representationerna utvecklas elevens matematiska förståelse mot mer abstrakta uttryckssätt. De inslag i laborativ undervisning som leder till denna utveckling tas upp av Emma. I teorivärlden benämns det ”concreteness fading” (Laski, Jordan & Daoust, 2015, s. 5). I detta sammanhang blir lärarens roll avgörande att på ett balanserat och målmedvetet sätt gradvis leda eleven mot allt mer abstrakta matematiska representationer (Laski et. al, 2015). Det av Emma beskrivna tillvägagångssättet kan enligt forskning utveckla elevens begreppsliga förståelse, underlätta för eleven att på ett mer flexibelt sätt tillämpa sina matematikkunskaper i nya sammanhang och i nya problemlösningsuppgifter (Laski et. al, 2015).

Som Moch betonar i sin artikel är lek med konkret material det mest naturliga sinnliga i sin natur lärandesättet för den unga eleven som har använt sig av konkreta föremål i sin utveckling och sitt lärande länge innan hon började lära genom faktainlärning och skriftspråket (Moch, 2008). Även på det sättet skapar det laborativa arbetssättet enligt henne en fast grund för elevens fortsatta utveckling samt hjälper skapa strukturer i de befintliga kunskaperna. Moch erkänner att det laborativa arbetet i matematik kräver extra undervisningstid men samtidigt konstaterar att den tiden vinner man sedan genom att inte behöva repetera samma matematikområden och undervisningsmoment eftersom det konkreta arbetet skapar en fast grund och bestående kunskaper hos eleven (Moch, 2008).

Berit och Adam nämner bland annat multiplikation och subtraktion som matematikområden där det konkreta arbetssättet kan klargöra vad som egentligen försiggår och vad eleven gör. Detta arbetssätt ”förtydligar” matematiken för eleven såsom Berit uttrycker det. Yook och Loongs studie bekräftar detta synsätt på det laborativa arbetssättet. Forskarna kommer nämligen fram till att detta sätt att undervisa blir som nämnt tidigare till en stadig grund och en nödvändig bas för utveckling av mer abstrakta begrepp och idéer hos eleven och det blir

den bland annat genom att reda ut elevens missuppfattningar inom ämnet. Den goda begreppsförståelsen byggs upp just genom att brister i den relationella och begreppsliga förståelsen överbyggs med hjälp av de konkreta operationerna och elevens reflektion över dessa (Yook & Loong, 2014).

I sin studie om amerikanska lågstadielärare kommer Moyer (2001) fram till en mängd intressanta iakttagelser. Hon upptäcker bland annat att det laborativa arbetssättet inte betraktas som en integrerad del i undervisningens alla moment utan snarare som ett moment i sig som egentligen ska tjäna andra syften än elevens matematiklärande. Den ska många gånger enbart stå för belöning och underhållning. Mina undersökningsresultat verkar skilja sig på det sättet från de presenterade i Moyers artikel (Moyer, 2001). Alla de intervjuade lärarna verkar betrakta det laborativa arbetssättet som en självklar och betydelsefull del i den dagliga matematikundervisning som hjälper eleven bygga upp sin förståelse inom de matematikfrågor som klassen för tillfället arbetar med. Det laborativa utgör alltså inte ett extra moment utan snarare en viktig dimension i vilken de behandlade begreppen kan betraktas och diskuteras av eleven.

När Moyer söker förklaringar till de intervjuades undervisningspraktik när det gäller konkretiserande material hänvisar hon till viss oro som lärare kan känna inför undervisningsmoment med struktur som avviker från det traditionella tysta arbetssättet. Hon väljer att citera en annan forskare, Elbow: "much teaching behavior really stems from an unwarranted fear of things falling apart" (Elbow, 1986 i Moyer, 2001). Det är intressant att även detta fenomen inte verkar gälla de av mig intervjuade pedagogerna. De visar tvärtom en djup förståelse och acceptans för det laborativa arbetssättets komplexa karaktär. De ser detta undervisningssätt som en utmaning både för pedagogen och eleverna men samtidigt en meningsfull sådan. Att komma in i det laborativa arbetssättet kräver både tid och tålamod och utgör ett långtidsprojekt i elevens lärande. Emma uttrycker till och med att detta projekt ska utvärderas även i årsperspektiv. Både Berit, Adam och Emma verkar se de laborativa aktiviteterna som värdefulla tillfällen där eleven får träna både sitt matematiska tänkande och den sociala förmågan. Adam uttrycker även att syften med de första tillfällena av laborativ undervisning är att enbart låta eleven bekanta sig med materialet och dess matematiska betydelse. Eleven behöver först ”äga materialet” innan det kan stödja hennes matematiska tänkande.

Sara framhäver att det bara är konsekvent och långsiktig användning av laborativt material som kan ge goda effekter för elevens lärande. Eleven blir i denna process allt mer medveten om de använda materialens skilda egenskaper och symboliska innebörd vilket i sin tur leder även till elevens ökade självständighet i det laborativa arbetet. Hon konstaterar:

> Jag använder laborativt hela tiden, jag vill att eleverna går till den nivån då de själva plockar, de har börjat göra det. Först och främst har jag använt det från grunden och om man använt något hela tiden och många gånger framför dem så kommer de att automatiskt tänka: där behöver jag om det är addition: där behöver jag pengar eller klossar.

Långsiktigt och regelbundet återkommande användning av visst konkretiserande material i flera olika matematiksammanhang kan leda till det som Winograd och Flores (1986) kallar för ”materialets genomskinlighet”. Denna önskvärda genomskinlighet låter eleven koncentrera sig på de begrepp som symboliseras av materialet i stället för att fokusera på själva materialet. Materialets symboliska innebörd blir automatiserad och därmed blir dess användning mer naturlig och effektiv. Som Winograd och Flores (1986) säger ”If the user is constantly aware of the artifact then it is not a tool, for it is not serving the purpose of enabling some desired

activity which moves one toward a desired goal state" (Winograd & Flores, 1986, s. 45). Denna önskvärda genomskinlighet är inte materialets inneboende egenskap. Den definieras snarare av de kunskaper och den matematiska förståelse som frigörs av materialets användning i en bestämd kontext. Graden av genomskinlighet kan förstås som en process som pågår i ett visst sociokulturellt sammanhang. Begreppets dynamiska karaktär verkar bekräftas av de intervjuade lärarnas syn på det laborativa arbetssättet som en process och ett långtidsprojekt. Det tar tid för eleven innan hon kan använda sig av ett visst laborativt material på ett obehindrat och självklart sätt.

Graden av genomskinlighet alltså "transparency" hos det använda materialet är tätt sammanvävd med den ovanför diskuterade processen benämnd "concreteness fading". Det är viktigt att börja det laborativa arbetet med hjälp av material kännetecknat av hög grad av genomskinlighet för att därefter uppmuntra den lärandes progression mot material med allt lägre grad av "transparency". Enligt Laski et. al blir Montessoris laborativa material ett uttryck för detta tillvägagångssätt. Från material vars utformning och utseende har tydlig och direkt koppling till de matematiska idéer det representerar utvecklas arbetet mot material som även inkluderar matematiska symboler (Laski et. al, 2015, s. 5).

4.1.2 Laborativt arbetssätt som en effektiv undervisningsstrategi i arbetet med "vissa elever"

Pietersen har genomfört en studie om den laborativa undervisningen i matematik där hon har undersökt det konkretiserande materialets påverkan över elevers lärande i varierade skolmiljöer (Pietersen, 2006). I studien ingick både vanliga elever och de elever som beskrivs som "i behov av särskilt stöd". Studien bekräftade de intervjuade lärarnas övertygelse om att alla elever drar nytta av det laborativa arbetssättet men detta arbetssätt kan få en helt avgörande roll för elever som brottas med olika slags lärandesvårigheter. I enlighet med Berits och Adams ord kan det laborativa materialet få en starkt inkluderande roll med hänsyn till elever med vitt skilda behov. Enligt Bruner är just den fördjupade förståelsen, den djupdykning i ämnet, som det konkretiserande materialet erbjuder, något som speciellt gynnar de "svagare" eleverna (Moch, 2008). Ett viktigt moment som det konkreta bidrar med i elevens lärande är den relationella förståelsen. Det konkreta materialet bidrar med nya insikter samtidigt som den låter eleven koppla ihop olika delar av matematiken, det strukturerar upp elevens befintliga kunskaper och förståelse. Denna relevanta del av det laborativa arbetet tas upp bland annat av Berit som berättar hur eleven kan genom att flytta klossar få fördjupad förståelse för sambandet mellan multiplikation och division.

Både Berit och Adam nämner det laborativa även som ett viktigt kommunikationsverktyg för elever med diverse språkstörningar och andra språkbegränsningar. Denna förmedlande roll hos det laborativa bekräftas bland annat av D´Angelo och Illievs studie. Enligt forskarna är det speciellt andraspråkselever som drar nytta av detta arbetssätt (D´Angelo & Illiev, 2012).

4.1.3 Reflektionens betydelse

Moyer (2001) nämner många lärares övertygelse om att det konkretiserande materialet kan med sin blotta närvaro i undervisningen bidra till elevens matematiklärande. Hon vänder sig mot denna föreställning och menar att det allra viktigaste i lärarens användning av laborativt material är hennes reflekterande förhållningssätt.

Till skillnad från dem av Moyer intervjuade lärare verkar mina intervjupersoner använda sig av materialet på ett reflekterande sätt. I samtalen med mig verkar de problematisera och analysera sin roll som pedagoger och lärare och se matematikundervisning som en utmaning

med många dimensioner och bottnar. Både Gunvor, Adam och Berit verkar angelägna om att komma åt elevens förståelse. De verkar växla mellan olika arbetssätt och undervisningsmetoder, försöka förändra dem efter de lärandebehov de observerar hos olika elever. De reflekterar över de olika elevernas skilda inre representationer, lärostilar och tankesätt. Deras mål verkar vara att låta eleven skapa egen personlig förståelse och egna inre bilder av de matematiska begreppen och procedurerna, samtidigt som hon utvecklas mot mer och mer abstrakta representationer. Detta ser de som ett svårt men spännande uppdrag. Som Clements säger ”Teachers must reflect on students' representations for mathematical ideas and help them develop increasingly sophisticated abstract understandings.” (Clements, 1999, s. 275). Det är även Mudaly och Naidoo som kommer fram i sin forskning till slutsatsen att reflektion i matematiklärarens laborativa arbete kan spela en avgörande roll. Det är bland annat just förmågan att reflektera över samt i undervisningsprocessen som kännetecknar de effektiva och erfarna matematiklärarna. Dessa lärare ägnade sig åt systematisk reflektion över elevernas skilda sätt att ta till sig de nya matematikkunskaperna. Utifrån sina slutsatser utvärderade och anpassade de därefter sin planering och undervisning (Mudaly & Naidoo, 2015).

Det som däremot inte nämns vare sig i Moyers artikel eller i mina intervjuer är elevens egna reflektion över det konkretiserande arbetet. Trygg beskriver denna fas som avgörande för det laborativa arbetets konsekvenser för elevens lärande och utveckling. Det är just den individuella och gemensamma metakognitiva reflektion som gör arbetet med laborativt material till något mer än bara ”görande” (Trygg, 2014, s. 178). Här stärks och bekräftas den betydelsefulla relationen mellan de abstrakta begreppen och de matematiska operationer som de fysiska hjälpmedlen blir en yttre representation för. Läraren och eleverna förtydligar i en gemensam diskussion vilka centrala områden och begrepp som har behandlats genom det laborativa undervisningsmomentet. Detta moment kan även enligt Trygg (2014) hjälpa att undvika missuppfattningar hos elever då forskning visar att elever ofta kan ha svårt att se i materialet de relevanta matematiska aspekterna. Detta tillvägagångssätt rekommenderar och praktiserar även Moch (2008). I slutet av varje lektion med laborativt material låter hon eleverna diskutera vad de har lärt sig och utvecklar ytterligare detta moment med elevens skriftliga reflektion över det som skett under lektionen. Hon menar att det skriftliga uttryckssättet ger det konkretiserande arbetet en mer abstrakt dimension. Moch tillägger även att elevens egna reflektion över det som sker i undervisningen minskar stressen och oron för matematiken (Moch, 2008). I ljuset av den ovanför presenterade forskningen skulle det bli väldigt intressant att undersöka vidare och ställa följdfrågor till lärarna om den plats elevens reflektion har i lågstadielärares laborativa undervisningsmoment.

4.1.4 Den lärande gemenskapen

Alla de intervjuade lärarna verkar fästa stor vikt vid de arbetsformer som tillämpas vid det laborativa arbetet. Alla verkar se smågrupper som en självklar undervisningsform i det laborativa arbetssättet. Arbetet i mindre grupper tillåter eleverna bland annat bekanta sig med materialet och även diskutera dess betydelse. Lärarna nämner även arbetet med problemlösning som ett centralt syfte med den diskuterade undervisningsmetoden.

D´Angelo och Illiev talar i sin artikel om den lärande gemenskapen som en viktig arbetsform vid den laborativa undervisningen. Den lärande gemenskapen utgör det lärandesammanhang där elever och läraren arbetar tillsammans och genom att diskutera förhandlar sig fram till nya matematiska kunskaper. En viktig förutsättning för detta arbetssätt är ett matematiskt problem som kan lösas på en mängd olika sätt. Ett huvudsyfte med detta tillvägagångssätt är att ge eleverna en möjlighet till en diskussion där de kan dela varandras problemlösningsstrategier

och tankesätt men även frågor. Det laborativa materialet blir enligt D´Angelo och Illiev till ett kommunikationssätt som hjälper eleven att konkretisera sitt abstrakta tänkande och därmed åskådliggöra det för sina kompisar. Det konkreta materialet i samspel med elevernas kommunikation hjälper eleven därmed utvecklas inom det proximala utvecklingszonen genom att överbygga avståndet mellan det abstrakta och det konkreta tänkandet. Såsom Bruner påstår blir både det verbala och det skriftliga språket de mest avancerade uttryckssätt i elevens matematiklärande. När eleven kan uttrycka sitt matematiska tänkande genom det matematiska språket visar hon att hon har skapat kopplingar mellan den informella och den högt abstrakta matematiska kunskapen (D´Angelo & Illiev, 2012).

Möjligheten att fritt uttrycka sina räknastrategier och tankesätt vid problemlösning är en tanke som frekvent återkommer i lärarnas uttalanden. Det konkreta materialets essentiella roll blir just att låta eleven uttrycka sig matematiskt vilket stämmer väl överens med Bruners tanke om det laborativa arbetssättet som en grund till utveckling av denna förmåga hos eleven (D´Angelo & Illiev, 2012). Värdet sätts på inkludering och ett möte mellan elevernas och lärarens olika tankesätt som kan åstadkommas genom det laborativa arbetet.

Det är just det matematiska problemet och det undersökande förhållningssättet till detta problem som hjälper att skapa en positiv och trygg miljö där eleverna vågar ställa frågor och tillsammans med läraren utforskar de matematiska problemen. Precis såsom de intervjuade lärarna gör betonar även D'Angelo och Illiev elevens aktiva roll i lärandet. Forskarnas ord: "Mathematical ideas cannot be poured into a passive learner" (D'Angelo & Illiev, 2012, s. 4) kan kanske speglas av Gunvors uttalande: "det jag lär ut lär de inte in förrän jag har anpassat undervisningen efter barnets lärostil." Här menar hon just det laborativa arbetssättet som den välbehövda anpassningen efter elevens "lärostil". Berit uttrycker det: "de behöver göra med kroppen!" (Berit). Eleven ses som en individ som aktivt konstruerar sin kunskap vilket även uttrycks i den elevcentrerade synen på det laborativa arbetssättet. Såsom Adam säger:

> (…) vi kommer tänka på att lyssna hur de använder materialet, vilka dialoger som uppstår var, hur de tänker, när man ser hur de flyttar på klossar då kan man se vad som händer i deras huvud.

Elevens tankesätt och kommunikation i den lärande gemenskapen blir för läraren en tillförlitlig väg till både fortsatt planering och bedömning alltså de delar i lärararbetet som utgör undervisningens grundbultar.

Stein och Bovalino konstaterar att den givande och utvecklande diskussionen i mindre gruppen kräver stort engagemang och ansträngning från lärarens sida. Lärarens medverkan blir ett nödvändigt inslag om denna arbetsform ska kunna stimulera elevens matematiska utveckling (Stein & Bovalino, 2001). Det är just denna insikt som Adam verkar sätta ord på i följande uttalande:

> Hade jag bara plockat fram stavarna och klossarna så hade de bara en viss, bara en liten del av klassen hade greppat: jaha det är en tia, och det här en etta, många då skulle inte förstå, de skulle kanske tänka: de är olika långa kanske.

Alla de intervjuade lärarna verkar förespråka sin aktiva involvering i det som sker i klassrummet. De menar att effektivt laborativt arbete kräver deras tydliga introduktion och vägledning. Utifrån Bovalino och Steins studie är dock lärarens medverkan en komplex och problematisk fråga. Enligt deras undersökning kan en alltför detaljerad och styrd introduktion motverka den givande och mångfacetterade gruppdiskussionen om det konkretiserande materialet. Om läraren kommer med färdiga lösningar eller med en alltför noggrann introduktion i användning av materialet som steg för steg leder eleverna i aktiviteten kan detta

påverka undervisningens fokus. Detta tillvägagångssätt kan rikta in eleverna på att slaviskt följa lärarens hänvisningar eller bestämda procedurer i stället för att väcka deras nyfikenhet och uppmuntra dem att tillsammans undersöka det presenterade problemet. Detta enligt Bovalino och Stein riskerar i sin tur att omvandla den ämnade diskussionen om möjliga problemlösningar till elevernas samtal om ”procedures without connection to meaning” (Stein & Bovalino, 2001, s. 2). Förutsättningar för att den lärande gemenskapen ska kunna uppstå är utrymme för elevernas fria kreativa resonemang och tankeutbyte som kan fördjupa deras gemensamma matematiska förståelse. Dessa inslag uteblir tyvärr vid den ovanför beskrivna sättet att organisera och planera det laborativa arbetet i mindre grupper.

Som Stein och Bovalino poängterar finns det två avgörande faktorer som utmärker lyckad probleminriktad undervisning i mindre grupper med hjälp av konkretiserande material. Detta är lärarens mångåriga praktik samt noggranna förberedelser gjorda av läraren inför undervisningstillfället: ”Lessons using manipulatives do not just happen. They are the product of much advance thought and preparation.” (Stein & Bovalino, 2001, s. 4). Stein och Bovalinos iakttagelse kan kanske delvis förklara varför just Berit, en erfaren lågstadielärare och speciallärare beskriver sin medverkan som mycket avvägd och balanserad:

> ”Du har ju chansen att höra elevernas resonemang och du kan flika in med små kommentarer” ”du kan delta i varje liten diskussion (…) och om du hör barnen spekulera så kan du slänga en liten fråga mitt i som inspirerar dem i tankarna.”

Hon pratar om att presentera problemet och därefter gå runt, lyssna till elevernas samtal och ”stödja dem i deras resonemang” i stället för att instruera dem på ett direkt sätt. Det är också hon som verkar ana det laborativa arbetets komplexa natur och betrakta det som en lång resa för både läraren och eleverna. Berit verkar tala om sitt samspel som om personlig kommunikation ansikte mot ansikte som även blir en respons på gruppens eller den enskilda elevens frågor och svårigheter. På det sättet blir hon själv medlem i den lärande gemenskapen. Även Adam nämner som ett av viktiga syften med sin laborativa undervisning att höra de dialoger som uppstår bland elever. Båda lärarna verkar alltså fokusera i sitt arbete på elevernas olika tankesätt snarare än på deras förmåga att enbart följa matematiska procedurer. Därmed verkar de koncentrera sig i sin undervisning på de av Thompson rekommenderade frågorna: ”How do we think about this? How can we think about this? How shall we think about this?” (Thompson, 1994, s. 558) med blicken riktad mot elevens begreppsbildning och meningsskapande. Genom sitt tydliga fokus på elevernas aktiva och gemensamma lärande samt hennes begreppsbildning och meningsskapande i matematik bidrar både Berit och Adam till skapandet av den lärande gemenskapen i sina klassrum.

Heddens (1986) diskuterar frågornas roll i både den dialog som uppstår bland elever och den inre dialog som för eleven vidare i hennes eget tänkande. Som forskaren konstaterar behöver läraren använda sig av en bred repertoar av givande frågor och ”ständigt utvärdera deras värde” (Heddens, 1986, s. 14). Dessa frågor ska kunna tillföra elevernas diskussion nya perspektiv och nya riktningar. De kan även hjälpa dem komma vidare i de tankebanor de redan har valt. En sådan ”liten fråga mitt i som inspirerar (eleven) i tankarna” som Berit benämner den låter eleven ”actively participate in thinking mathematically” (Heddens, 1986, s. 15) alltså lära aktivt. Dessa frågor använda av läraren på ett konsekvent och systematiskt sätt kan även så småningom internaliseras av eleven, alltså bli en del av hennes egna ”inre dialog” där hon självständigt för sitt matematiska tänkande och sina matematiska resonemang vidare (Heddens, 1986, s. 14). Det är bland annat den diskuterade typen av frågor som gör den lilla arbetsgruppen till den lärande gemenskapen, alltså ett sammanhang där ”tankeprocesser

synliggörs” för både eleven själv och de andra lärande (Heddens, 1986, s.15).

4.1.5 Variationens betydelse

Alla de intervjuade lärarna verkar uppfatta variation i den erbjudna konkretiserande materialet som entydigt positivt inslag i undervisningen. I sin studie kommer Howard, Perry och Tracey (1997) fram till att elever borde undervisas med hjälp av varierat laborativt material. Eleverna borde dessutom ha tillgång till dessa varierade konkretiserande läromedel både vid introduktion av ett nytt matematikområde och vid det fortsatta kunskapsbyggandet inom respektive matematikområde. Lärarna verkar dela denna övertygelse och på frågan vilka matematikområden som borde behandlas laborativt svarar Emma:

> ”Jag tycker det mesta, det mesta ska förstärkas. Jag tänker dels att jag försöker inleda med något laborativt, nya teman innan man går på det mer teoretiskt att de får testa på det laborativt men sen även under arbetsgång att det laborativa ska vara tillgängligt så att de vet var det finns.”

Enligt Bruner kan elevens förståelse av ett matematiskt begrepp fördjupas och nyanseras genom att hon får möta det i form av varierat konkretiserande material (McNeil & Uttal, 2009). Denna variation av matematiska representationer ska hjälpa eleven att se just de av materialet förmedlade begreppen i stället för att enbart se själva materialet. På det sättet kan variationen även förebygga missuppfattningar som kan uppstå i elevens lärande. Såsom Larkin konstaterar användning av enbart kvadratiska föremål i undervisning om yta kan få eleven att tro att det enbart är kvadrater som har en yta (Larkin, 2016, s. 13). Genom variation av matematiska representationer stärker vi med andra ord den representativa kraften hos det laborativa materialet och hjälper eleven få fram den abstrakta matematiska innebörden i skeendet. Såsom Ostad konstaterar: ”generaliseringskraften i det laborativa materialet är för svagt för vissa barn” (Ostad i Ljungblad, 2012, s. 127). Utifrån Piaget påstår Malmer att det är genom erfarenhet och handlingar som eleven utvecklas i sitt tänkande till ”större och större abstraktion” och under denna resa är olika sorters material helt avgörande (Malmer, 1999, s. 23).

Det finns alltså vetenskapliga belägg för lärarnas synsätt på det brett varierade laborativa materialet som didaktiskt värdefullt. Detta entydigt positiva synsätt nyanseras dock en aning i Uttal och Scudders artikel *Manipulatives as symbols: A New Perspective on the Use of Concrete Objects to Teach Mathematics* (1997). Forskarna ifrågasätter det oproblematiska förhållningssättet till laborativ matematikundervisning som uppmuntrar frekvent introduktion av många olika konkretiserande läromedel. De menar att effektivt laborativt arbete kräver konsekvent, långsiktigt och systematiskt arbete kring en och samma typ av laborativt material. Det långsiktiga laborativa arbetet kan rikta elevens uppmärksamhet på de matematiska begreppen och operationerna och motverka överdrivet fokus på materialets fysiska egenskaper, alltså bidrar till den tidigare diskuterade genomskinligheten hos materialet. Uttal och Scudders perspektiv ifrågasätter alltså lärarnas självklara attityder till variationen i det laborativa arbetet. Variationen i sig kan inte bli syftet med det laborativa arbetet. Det är bara när den stödjer elevens förståelse för de matematiska relationerna, när kopplingen mellan materialet och dess symboliska innebörd blir begriplig som lärandet kan ske (Uttal & Scudder, 1997, s. 51).

Gunvor tar upp en annan aspekt av det laborativa materialet. Hon menar att de flesta föremålen i elevens omgivning kan bli till bra laborativt material. Hon nämner mönstrade gardiner, elevens teckningar och slöjdkonstverk. Hon menar att sådana material kan upplevas som mer spännande än traditionellt laborativt material och mer personligt för eleven. Detta

kan säkert stämma men okritisk användning av material som starkt stimulerar elevens sinnen har blivit ifrågasatt av forskningsvärlden.

McNeil, Uttal, Jarvin och Sternbergs studie visar att iögonfallande och starkt sinnligt stimulerande laborativt material kan även hindra elevens matematiklärande och försvåra lärandet av matematiska begrepp. Användning av ”perceptually rich manipulatives” (McNeil et. al, 2008, s. 174) alltså material som stimulerar flera olika sinnen kan distrahera eleven och därmed leda till flera misstag men även hindra eleven från att koppla ihop de informella matematikkunskaper alltså vardagsmatematiska kunskaper med den formella matematiken (de matematiska symbolerna) vilket är en nödvändig förutsättning för elevens fortsatta goda matematiklärande och utveckling (McNeil et. al, 2008). Materialets attraktiva utseende kan även förhindra den positiva automatiseringen i användningen av laborativt material där materialet kan bli en genomskinlig representation av matematiska idéer.

Även användning av vardagsnära material i laborativ undervisning kan enligt Laski et. al ha negativ påverkan över elevens lärande. Dessa material har ofta egenskaper som drar till sig elevens uppmärksamhet utan att kunna kopplas till deras matematiska innebörd i sammanhanget. Det är även den vardagsnära rollen dessa föremål har i barnets liv som kan försvåra lärandet. Risken är att eleven kommer använda till exempel de nallar som han ska räkna ihop till fri lek alltså på samma sätt som hon annars använder dem i vardagen (Laski et. al, 2015). Den materialvariation som bland annat Berit och Gunvor tar upp när de nämner frukt och elevens egentillverkade bilder behöver inte alltid vara det bästa valet med hänsyn till elevens begreppsförståelse och hennes koncentration på det presenterade matematiska problemet.

Uttal, Scudder och Deloache ser japansk matematikundervisning som en möjlig förebild i denna aspekt. De japanska eleverna får använda sig av samma enkla uppsättning av laborativt material genom hela sin grundskoleutbildning. Forskarna påstår: ”Becoming accustomed to the same manipulative set might free the children to focus on the mathematics ideas instead on what the manipulatives represent” (Uttal et. al, 1997, s. 50).

Den presenterade forskning gällande utformning av laborativt material ger perspektiv på ämnet och visar det som komplext och mångfacetterat. De många gånger motstridiga forskningsresultat antyder dock att det laborativa arbetet kräver reflekterande och kritiskt förhållningssätt samt medvetenhet om att det inte finns några självklara svar på frågor gällande detta undervisningsområde.

4.1.6 Laborativt arbetssätt är att ”leka matematik”

I mina intervjuer med lärarna och i den forskning som jag har kommit i kontakt med möter jag ofta en bild av det laborativa arbetssättet som en lekfull, lustfylld eller lekliknande matematikaktivitet. Denna kan dock betraktas och tolkas utifrån olika teoretiska perspektiv.

Temat av det laborativa arbetssättet som en väg till en mer lustfylld matematikundervisning återkommer i lärarnas uttalanden. De använder ofta orden ”roligt” och ”kul” när de beskriver elevernas upplevelse av det laborativa arbetet. Forskaren Moyer (2001) kommer fram till att det kan finnas risker med att överdriva den underhållande rollen i det laborativa arbetssättet. De av henne intervjuade lärarna verkar som nämnt tidigare betrakta och använda det laborativa arbetssättet som ett undervisningsmoment oberoende från den ordinarie undervisningen där syftet huvudsakligen är just att underhålla och belöna eleven efter ett mer

krävande arbetsmoment i ämnet. Detta tillvägagångssätt har enligt forskaren sin förklaring i lärarnas syn på det laborativa materialet som underlägset andra mer abstrakta matematiska uttryckssätt. Det laborativa arbetssättet presenteras som motsats till det ”riktiga matematikundervisningen” (Moyer, 2001, s. 187) det vill säga det som i artikeln benämns ”real math” (Moyer, 2001, s. 187) där viktiga matematikbegrepp lärs in. Det är de papper- och penna-baserade aktiviteterna som verkar utgöra kärnan i deras undervisning och får därmed högst status i matematikklassrummet. Moyer menar att dessa attityder hindrar lärarna från att utnyttja den lärandepotential som finns i det konkretiserande materialet. Det laborativa arbetssättet knyts inte an till de aktuellt behandlade begreppen (Moyer, 2001). Därmed får eleven inte möjligheten att använda det konkreta materialet som yttre representation av sin matematiska förståelse. Hur förhåller sig Moyers slutsatser till mina observationer?

De fyra av mig intervjuade lärarnas synsätt skiljer sig betydande från det iakttagna av Moyer. I likhet med Moyers lärare betonar de att det laborativa materialet gör lärandet till en engagerande och lustfylld upplevelse för eleven men denna underhållande egenskap hos materialet blir snarare en väg till en fördjupad matematisk förståelse och meningsskapande än bara underhållning för underhållningens skull. De ser det konkretiserande materialet som en viktig matematisk representation som spelar en avgörande roll i elevens begreppsbildning. Emma verkar betona just detta, att det laborativa alltid ska fungera som en oumbärlig och integrerad del i den ordinarie matematikundervisningen, som en målinriktad aktivitet. Adam lyfter hur arbetet med klossar hjälper eleven att skapa inre matematiska representationer av matematiska operationer och begrepp. Berit berättar med entusiasm hur hennes elever bygger upp egen förståelse av volymbegreppet med hjälp av vatten och olika köksmått. I båda fallen uppmuntrar det laborativa materialet elevens aktiva begreppsbildning och inte enbart hennes mekaniska förståelse (Moyer, 2001, s. 191). Det är addition, subtraktion, multiplikation och volym med mera, alltså läroplanens centrala innehåll som bearbetas genom det laborativa arbetssättet medan i Moyers undersökning utgör de laborativa undervisningsmomenten snarare en lek och underhållning som står helt oberoende från de aktuellt behandlade områdena.

Berit verkar medveten om den av Moyer diskuterade syn på laborativt arbetssätt som underlägsen den mer formella matematiken. Hon nämner att både fingerräkning och kuber som matematisk representation kan avvisas av pedagoger och lärare som uttryckssätt underlägsna de mer abstrakta sätten att kommunicera matematiskt tänkande. De kan till och med förbjudas av lärare vid vissa undervisningsmoment och tolkas som ”fusk” från elevens sida. Detta skulle överensstämma med Moyers (2001) observation som jag har nämnt tidigare.

De av mig intervjuade lärare delar dock inte detta perspektiv. De ser det lustfyllda inslaget i det laborativa arbetssättet som en möjlighet till fortsatt arbete mot både elevens djupare matematiska förståelse och mer och mer abstrakta representationer inom ämnets alla områden. Det laborativa arbetssättet betraktas som en lek men en djupt meningsfull sådan, noggrant planerad och genomtänkt av läraren. Det utgör lustfyllt lärande i motsatsen till ett lustfyllt avbrott i matematiklärandet såsom det beskrivs i Moyers forskningsresultat (Moyer, 2001).

Detta markeras tydligt i intervjun med Emma där hon förtydligar att hon aktivt motverkar användning av laborativt material enbart för underhållningens skull:

> Emma: Det är elever som börjar bygga med det istället, som använder det till något de inte ska, som börjar bygga torn, såna grejor… det kan bli störande.
>
> Jag: Hur gör du då?

> Emma: Ja men då försöker man avleda liksom eller kanske byta det laborativa, byta material. Det är kanske inte det som passar just då utan det är något annat som passar istället.

Det tidigare diskuterade begreppet ”materialets genomskinlighet” kan göra sig gällande i detta sammanhang. Kan det vara så att Emma i denna situation erbjuder eleverna enklare och mindre iögonfallande eller mindre vardagsnära material med tydligare koppling till det matematiska problemet? Laski et. al (2015) betonar att elevens tendens att leka med laborativt material kan underminera lärarens strävan att effektivisera matematiklärandet och istället hindra läroprocessen (Laski et. al, 2015, s. 6). Laborativt material som inte lockar med sitt utseende till lek kan i detta sammanhang få bättre effekter på elevens lärande.

Det intressanta är att det av Moyers intervjupersoner använda begreppet ”real math” (Moyer, 2001: 187) används även av forskaren och pedagogen Zoltan Dienes (Sriraman & Lesh, 2007, s. 67). I samtalet med honom laddas dock begreppet med motsatt innebörd mot den som diskuteras i Moyers studie. Hans förståelse av ”den riktiga matematiken” överensstämmer snarare med de av mig intervjuade lärarnas. Han ser ”den riktiga matematiken” (min översättning: Sriraman & Lesh, 2007, s. 67) just i lustfylld och engagerad användning av de multipla representationerna. Matematiken ska uttryckas och läras in via språket, musiken och konkreta föremål innan de matematiska symbolerna får träda fram. Det är enligt Dienes ”matematiska strukturer och mönster” som barnet kan urskilja via dessa skilda uttryck. Det är just dessa matematiska strukturer och regelbundenheter han kallar för ”the essence of abstraction” (Sriraman & Lesh, 2007, s. 67). Man behöver arbeta engagerat, länge och systematiskt genom de multipla representationerna innan man som lärare kan börja i större utsträckning börja arbeta via de matematiska symbolerna. Sist tillägger Dienes även att liknande syn på matematikundervisning tyvärr ofta lyser med sin frånvaro i skolor: ”The reason mathematics is boring in schools is because no *real mathematics* is taught in schools.” (Sriraman & Lesh, 2007, s. 67). Utifrån de intervjuade lärarnas uttalanden kan man dock säga att Dienes ord inte helt överensstämmer med den svenska skolans verklighet. Dessa lärare verkar ju systematiskt och konsekvent arbeta med ”real mathematics” (utifrån Dienes tolkning av detta begrepp: Sriraman & Lesh, 2007, s. 67). Dienes påståenden leder tankarna till Gunvors ord:

> Matematik är för ensamt som ämne, det borde egentligen byggas ihop med mönster, musik, rytm, även hur man lägger upp scheman alltså olika regelbundenheter och mönster. Till exempel på de här gardinerna, eller hur de här bilderna hänger (pekar på väggen i klassrummet där elevernas målningar sitter).

En annan tanke som väcks av Dienes ord är den koppling han gör mellan den traditionella papper- och penna matematikundervisningen och elevernas bristande engagemang och skoltrötthet. Det laborativa arbetssättet är en engagerande och rolig undervisningsmetod i ljuset av hans påstående. Ett inslag som gör det laborativa arbetet just till ett lustfyllt och lekfullt lärandemoment blir enligt mina intervjupersoner bland annat den sinnliga dimensionen i aktiviteten. Eleven ska få många tillfällen att lära ”med kroppen” (Berit), ”med händerna” (Adam), ”att känna och se” (Adam) matematiken. Arbetet med laborativt material engagerar eleven i undervisningen genom att involvera alla hennes sinnen. Såsom Moch uttrycker det: ”Manipulatives afforded students an opportunity to touch and feel mathematics- not just to see it or hear it. ” (Moch, 2008:86). Moch konstaterade utifrån sin egen undersökning att även de elever som inte tyckte om matematik tidigare blev tydligt engagerade i lektionerna och såg fram emot att undersöka kommande nya matematiska begrepp på liknande sätt. Denna iakttagelse verkar bekräftas av de intervjuade lärarna som

betonar att det sinnliga arbetssättet blir uppskattat och upplevs som fängslande av både låg- och högpresterande elever (Moch, 2008). Såsom Berit säger:

> De tyckte det var otroligt roligt och så satt de fyra och fyra så det blev som ett spel. Även de som var jätteduktiga i matte tyckte det här var superroligt.

Enligt forskarna D´Angelo och Iliev (2012) är det både elevens sinnen samt spatiala och kinestetiska intelligensen som involveras i denna lärandeprocess och därmed blir kunskaperna mer bestående och välgrundade. Det sinnliga inslaget i det laborativa arbetet leder alltså till ett mer hållbart lärande. Enligt Ljungblad (2012) blir det särskilt viktigt för elever med svagare antalsuppfattning att de får komma i kontakt med matematiken via alla sinnen. Detta kopplas även av Ljungblad till arbetet med olika inlärningsstilar vilket också lyfts av både Berit och Gunvor i intervjuerna (Ljungblad, 2012).

Den sinnliga upplevelsen blir även den kontext som de abstrakta formella matematiska kunskaperna kan byggas upp på och bli verklighetsförankrade. Det konkretiserande materialet blir till det sammanhang som låter eleven bygga upp begreppslig förståelse nödvändig för att kunna på ett meningsfullt sätt använda abstrakta matematiska symboler (Timmerman, 2014). Detta sammanhang utgörs inte enbart av den sinnliga karaktären hos arbetssättet utan även av de elevnära och vardagsnära teman och material som används för att både introducera och träna olika matematikområden, såsom elevens egen frukt, bullar, av eleven inspirerad affär-lek och café-lek.

Både McIntosh (2015) samt Heiberg Solem, Alseth och Nordberg (2011) lyfter användning av teman och material från elevens vardag som en bra grund för introduktion av nya matematiska begrepp. De nya abstrakta matematiska idéerna förmedlas då och symboliseras i sammanhang som av eleven upplevs som bekanta och trygga. D'Angelo och Illiev påstår även att involvering av elevens alla sinnen förenad med användning av vardagsnära material och teman gör både den nyvunna och den fördjupade matematiska kunskap och kompetens mer flexibel och formbar. Den blir lättare att applicera i nya situationer och sammanhang vilket också bidrar till kunskapens bestående karaktär (D´Angelo & Illiev, 2012). Gränser mellan den formella och informella matematiken samt mellan den matematik som används i skolan och den som är nödvändig på fritiden suddas ut och flyter samman (Norén, 2010).

4.2 Hur förhåller sig lärarnas arbetssätt till den i studien använda forskning?

4.2.1 Lärarnas medverkan genom introduktionen av det erbjudna laborativa materialet samt genom deras närvaro under arbetets gång

Alla de intervjuade lärarna säger sig introducera det erbjudna laborativa materialet i helklass innan de låter eleverna använda det. Det är syftet med användning av det aktuella materialet och dess innebörd som tydliggörs av läraren i början av en laborativ lektion. Det är i detta undervisningsmoment som kopplingar mellan det konkretiserande föremålet och det abstrakta matematiska begreppet synliggörs för eleverna. Denna undervisningsstrategi kallas av Wearne och Hiebert för ”connecting” (Wearne & Hiebert, 1988, s. 372). Det konkreta och det abstrakta i matematiken ska presenteras och användas parallellt för att eleverna själva ska kunna få djupare förståelse av det behandlade begreppet och av de olika matematiska representationernas innebörd (Uttal et. al, 1997, s. 48). Även Moyer betonar i slutsatser av sin

studie att det centrala i laborativ undervisning är de matematiska samband och begrepp som kan synliggöras via det konkretiserande materialet. ”Connecting” blir i detta sammanhang det hon kallar ”imposing mathematical relationships on the materials” (Moyer, 2001, s. 192). Den yttre fysiska representationen knyts i denna process till de representerade matematiska begreppen som i sin tur blir till elevens inre matematiska representation (Moyer, 2001, s.192). Med Moyers ord: ”connecting the learner´s own mental actions with the shared tools used for representation is the challenge for mathematics teachers.” (Moyer, 2001, s. 194).

Denna process hjälper eleven att förstå det konkreta materialets symboliska innebörd vilket är helt avgörande för hennes fortsatta matematiklärande (Uttal et. al, 1997, s. 48). ”Connecting” är viktigt även för att minska elevens kognitiva belastning-hon kan fokusera på de matematiska begreppen och operationerna i stället för att anstränga sig för att på egen hand förstå kopplingen mellan det abstrakta och det konkreta (Laski et. al, 2015, s. 6). Denna roll hos det laborativa materialet verkar även Adam ta hänsyn till i sitt arbete:

> Hade jag bara plockat fram stavarna och klossarna så hade de bara en viss, bara en liten del av klassen hade greppat: jaha det är en tia, och det här en etta. Många, de skulle inte förstå, de skulle kanske tänka: de är olika långa kanske. Därför är det viktigt att man går igenom vad materialet är, vad det är för material och vad det används till. Därför tänker jag: det är bra att börja i helklass, tills de verkligen förstår materialet innan de använder det, innan de använder det själva.

Han konstaterar att bristande medverkan kan leda till elevens förvirring och bristande matematisk förståelse. Det är även Uttal et. al som betonar likt Adam att brister i lärarens vägledning kan få allvarliga konsekvenser för elevens lärande. Om eleven inte förstår innebörden i det använda laborativa materialet kommer hon rikta sin uppmärksamhet på själva materialet i stället för att se materialet mer som representation för matematiska operationer och begrepp. I detta sammanhang kan det laborativa arbetssättet bli till och med kontraproduktivt för elevens lärprocess (Uttal et. al, 1997, s. 47).

Sara beskriver hur hon i introduktionen av laborativt arbete kan använda sig av multipla representationer: både pengar, klossar och tal för att uttrycka ett abstrakt matematiskt begrepp. Just att på det sättet kombinera multipla representationer vid introduktion av ett nytt abstrakt begrepp kan bli en effektiv metod enligt McNeil och Uttal (McNeil & Uttal, 2009, s. 138). En mängd av olika uttrycksformer kan hjälpa eleven att göra generaliseringar som i sin tur underlättar begreppsförståelsen.

Både Adam och Emma berättar om att de använder samma material vid modellering och introduktion som de därefter erbjuder eleverna till eget utforskande. Trygg kommer fram i sin artikel till att lärarens introduktion av laborativt material kan ge ännu bättre effekter om det av eleverna använda materialet liknar men inte är likadant med den använda av läraren vid introduktionen. Hon ger ett exempel där bambukäppar använda av läraren ersätts i elevernas egna laborationer av tändstickor. Detta tillvägagångssätt kan föra tankarna till Bruners teori om det varierade laborativa materialet som hjälper eleven urskilja det matematiska mönstret (Bruner, 1966). Trygg ser likt Bruner i denna metod en potential att uppmärksamma eleven på de förmedlade matematiska begreppen istället för att fokusera på själva materialet (Trygg, 2014).

Medan Emma pratar framför allt om en inledande introduktion till det laborativa arbetet berättar både Adam, Berit och Sara om sin ständiga delaktighet och vägledning i elevernas laborativa arbete. De berättar hur de lyssnar på elevernas dialoger för att observera var de

befinner sig i sitt lärande men även för att väcka deras reflektion och fördjupa förståelse för det de gör med hjälp av laborativt material. Såsom Sara och Berit säger:

> (…) hur gör du frågar jag då? Jag gör så här. Varför gör du så här? Ofta tror de då att de gjort fel men det är inte så utan jag vill att de ska reflektera. (Sara)

> Om du hör barnen spekulera så kan du slänga en liten fråga mitt i som inspirerar. (Berit)

Detta tillvägagångssätt verkar stämma med Uttal, Scudder och DeLoaches forskningsresultat. Kopplingen mellan talen samt operationstecken och det konkreta materialet behöver göras från början av arbetet och det konkreta och abstrakta ska samspela och vara ständigt närvarande under undervisningens lopp. Denna undervisningsmetod kallad för ”the dual representation” förutsätter även att (Wearne & Hieber, 1988) läraren löpande och ständigt observerar elevernas agerande och tillvägagångssätt för att säkerställa att eleven förstår innebörden i det hon gör (Uttal et. al, 1997, s. 49).

Uttal et. al (1997) poängterar även att de tydliga kopplingar läraren gör mellan det konkretiserande materialet och det abstrakta begreppet konsekvent ska återkomma i undervisningen. Han menar att associationer mellan det konkreta och det abstrakta som har skapats hos eleverna behöver tas upp om och om igen vid varje tillfälle då materialet används även om det används dagen efter introduktionen och genomgången av det konkreta materialet. Sådana kopplingar kan glömmas bort av eleven ganska snabbt menar Uttal och Scudder. Sara verkar medveten om vikten av repetition och ständiga återkopplingar till tidigare undervisningsmoment när hon säger:

> Det här med tiobasmaterialet och färger glömmer eleverna väldigt snabbt så jag behöver ta upp det och börja från början om och om igen.

4.2.2 Det långsiktiga arbetet med laborativt material

Det är inte enbart lärarens ständiga ”connecting” (Wearne & Hiebert, 1988, s. 372) som blir en förutsättning för en lyckad laborativ undervisning. Enligt Laski et. al (2015) behöver barn tid för att kunna förstå kopplingen mellan det abstrakta och det konkreta. Denna viktiga koppling ska av läraren förtydligas både genom verbalt språk och kroppsspråk under långa tidsperioder. Enligt forskningen behöver eleven regelbundet undervisas med hjälp av samma laborativt material under minst ett års period och minst en timme i veckan för att det laborativa arbetet ska kunna ge positiva effekter för elevernas matematiska utveckling (Sowell, 1989, s. 504). Kortare undervisningsperioder visar ingen påverkan över elevens lärande och förståelse av de matematiska begreppen (Laski et. al, 2015, s. 8). Konsekvent användning av samma konkretiserande material hjälper eleven att förstå relationen mellan den matematiska representationen och det representerade matematiska begreppet och göra den till sin inre mentala bild.

Både Adam, Berit och Sara verkar (som nämnt tidigare) planera och arbeta med sin laborativa undervisning i långtidsperspektiv. De talar om att arbeta laborativt ”redan från början” (Sara) ”hela tiden” (Berit) och med ”det mesta” i matematiken (Emma) vilket förblir i överensstämmelse med ovanför beskrivna forskningsresultat. Eleverna får arbeta laborativt under långa perioder och därmed bygga upp djupare förståelse av de matematiska begreppen.

Min avsikt med denna studie har under arbetets gång blivit även att undersöka den andra frågeställningen genom observation av de intervjuade lärarnas laborativa arbete med eleverna.

Tyvärr har denna del av min studie inte varit möjlig att genomföra. Det är bara en av de fem lärarna som kunde medverka på detta sätt men hon blev tyvärr också sjukskriven under denna period. De andra intervjupersonerna berättade att de närmaste veckorna av deras arbete skulle helt ägnas åt elevernas bedömningsstöd och nationella prov. I detta sammanhang kan även de förhinder lärarna mötte i sitt laborativa arbete bli ett värdefullt budskap värt att reflektera över.

De tillfrågade lärarna uttryckte att det var ”stressigt” med allt pappersarbete som behövde göras och ansåg sig inte ha tid med några laborativa lektioner i matematik som jag eventuellt skulle kunna observera under de närmaste veckorna. Moyer (2001) diskuterar i sin studie de intervjuade lärarnas dilemma. Hon iakttar att det laborativa arbetet inte får den centrala roll i matematikundervisning som den egentligen förtjänar men detta beror ofta inte på lärarnas bristande kunskaper i detta undervisningsområde utan på den stress de upplever i sin arbetsvardag. Eftersom elevernas lärande först och främst utvärderas genom standardiserade skriftliga prov blir papper-och-penna-baserade aktiviteter de mest frekvent använda av de professionella. Det är även den typen av aktiviteter som anses utgöra mest effektiv förberedelse inför de regelbundna proven och testerna. Det är även Moch (2008) som i sin artikel diskuterar den stora börda av många olika uppgifter och roller som läraren blir tvungen att hantera i sin vardag. Hon menar att många lärare periodvis prioriterar bort det laborativa arbetet även om de förstår dess stora betydelse för elevernas lärande. De känner sig tvungna att i stället fokusera på andra dem ålagda uppdrag (Moch, 2008). En del av lärarnas arbetsbörda kan anses vara de bedömningsstöd som skulle göras för alla elever och som lärarna arbetade med just under de veckor jag planerade genomföra min observation.

De av mig intervjuade lärarna verkar väl medvetna om det laborativa arbetets vikt för sina elevers matematiska utveckling. Av intervjuerna framgår att de gör sitt yttersta att i så stor utsträckning som möjligt diversifiera undervisningen även via laborativt arbete. De verkar dock samtidigt i likhet med de amerikanska matematiklärarna uppleva press på grund av de regelbundna skriftliga utvärderingarna i form av nationella prov. Enligt de av mig intervjuade lärarna tog både själva genomförandet av nationella prov och förberedelser inför dessa den tid som annars hade kunnat läggas ner på mer varierad matematikundervisning. Som Moyer betonar läggs störst fokus i liknande standardiserade skriftliga prov på elevens procedur- och faktakunskaper i stället för begreppsförståelsen och resonemangsförmågan. Detta leder till att lärare många gånger känner sig pressade att betona just de testade kompetenserna även i sin undervisning. Som Moyer själv uttrycker det: ”There is not much room for manipulatives in these procedure-driven scripts” (Moyer, 2001, s. 190).

Om man i detta sammanhang tar hänsyn till forskningsresultat gällande den effektiva laborativa undervisningen i matematik där kontinuiteten och långsiktigheten betonas kan vi konstatera att lärarna inte ges tillräckligt goda förutsättningar för sitt laborativa arbete. Skolans yttre styrning via skriftliga nationella utvärderingar och prov undergräver de professionellas ansträngningar att skapa kvalitativt tillfredställande och vetenskapligt underbyggd matematikundervisning för sina elever.

4.2.3 Planering av progression och lärarens frågor i lärarnas laborativa arbetssätt

Lärarna verkar väl medvetna om den noggranna planeringens roll för elevens utveckling och progression i lärandet. Av Berits och Saras ord framgår att båda lärarna observerar och noggrant följer upp sina elevers ökande matematiska förståelse av de behandlade begreppen. Stöttor i form symboler (färger i Saras laborativa matematikundervisning) och språkliga

verktyg, sådana som Berits frågor. I enlighet med Heddens (1986) artikel och även Vygotskijs teori kommer denna stöttning bli internaliserad av eleven. Färgerna kommer att på ett spontant och naturligt sätt associeras till talens olika plats i positionssystemet medan de av Berit ställda frågorna kommer att bli till elevens inre monolog eller inre frågor som hon använder sig av för att lösa matematiska problem på egen hand (Vygotskij, 2001).

De av lärarna ställda frågor som togs upp i resultatdelen av detta arbete kan få en mycket komplex roll. Samtidigt som de i sig kan erbjuda utmaning att komma vidare och upptäcka nya lösningsstrategier eller tankesätt (såsom i Berits fråga om multiplikation) så kan de även utgöra den ovanför diskuterade stöttning som eleven behöver för att utvecklas. Vid de laborativa aktiviteterna får även det konkretiserande materialet en tydligt stöttande roll. Genom att till exempel använda sig av frukterna i affärleken får eleverna möta och bearbeta additionens och multiplikationens innebörd.

Moyer lyfter även en annan dimension i användning av frågor i laborativ matematikundervisning. Hon betonar vikten av lärarens fokus i kommunikationen med eleven. Lärare tenderar enligt henne att underskatta vikten av elevens eget meningsskapande i den laborativa läroprocessen. Det är först när läraren i sin undervisning fokuserar på elevens egna inre matematiska representationer som hon kan stärka hennes matematiska resonemangsförmåga (Moyer, 2001, s. 192). Sådan undervisning som utgör en kontinuerlig dialog mellan lärarens och elevens sätt att förstå och tolka materialet kan enligt Moyer motverka missförstånd och leda till fördjupning i elevens matematiska förståelse (Moyer, 2001, s. 193). Det är även ur detta perspektiv som man kan se på de frågor Sara ställer till sina elever när hon stämmer av hur de tänker vid användning av laborativt material. Frågor: ”hur gör du? Varför gör du så här?” ska enligt Sara skapa förutsättningar för elevens reflektion över det hon gör men de kan även synliggöra för läraren hur eleven själv skapar matematiska samband i anknytning till det laborativa materialet. Här får frågor en mer sammansatt roll. De hjälper att gradvis bygga upp elevens progression samtidigt som de kan lägga grund för ”connecting” (Wearne & Hiebert, 1988, s. 372) det vill säga elevens konstruktiva och meningsfulla tolkning av det laborativa materialet.

Adam, Berit och Sara verkar ställa till sina elever ”hur och varför” frågor, alltså de frågor som enligt Heddens hjälper eleven att överbygga avståndet mellan det konkreta och det abstrakta (Heddens, 1986, s. 14). Dessa frågor har som syfte att medvetandegöra både för eleven och läraren hur den lärandes inre matematiska representationer utformas. Frågorna blir enligt Heddens ett viktigt verktyg i att utforma och stimulera elevens progression från det konkreta till den abstrakta matematiska förståelsen. Denna progression ska planeras och struktureras upp i mindre sekvenser hanterbara för eleven (Heddens, 1986, s. 17).

Bliss, Askew och Macrae (1996) likt Heddens betonar i sin studiediskussion att den diskuterade progression som läraren skapar förutsättningar för behöver ske i mycket avvägt tempo, välanpassat efter elevens förmåga. Såsom han själv säger om lärare: ”they must be content that often pupils can only do this one step or a few steps at a time” (Bliss et. al, 1996, s. 20). Elevens väg till mycket abstrakta, specialiserade matematikkunskaper ska stakas ut genom förhandling mellan eleven och läraren för att bygga upp elevens självförtroende och förmågor i stället för att underminera dem.

Det är viktigt med välgenomtänkt och individuellt anpassad progression i matematik där lärarens frågor och kommunikation i stort har en central roll. Samtidigt är det mycket svårt enligt Bliss att genomföra i praktiken. Läraren har enligt forskarna många olika roller och

krav att uppfylla: hålla lektionen i gång och alla elever sysselsatta samtidigt som hon interagerar med dem individuellt för att erbjuda den nämnda utmaningen i form av de föreslagna frågorna. Det är även klasstorleken som i detta sammanhang utgör en försvårande omständighet: detta arbetssätt ska snarare lämpa sig för arbetet med en mindre elevgrupp enligt forskarna. Denna slutsats kan även föra våra tankar till det tidigare diskuterade uttalandet från Berit. Hon såg också matematikundervisning i helklass som en stor utmaning. Både lärarens dialoger med eleven och hennes försök att bedöma elevens befintliga kunskaper och förmågor ”kräver både tid och tålamod” (Bliss et. al, 1996, s. 20).

Det är även lärarnas otillräckliga ämneskunskaper som enligt Bliss kan bjuda motstånd i detta arbetssätt. Många lärares bristande kunskaper leder till missförstånd i kommunikationen med elever. Läraren misslyckas ofta att förstå sina elevers svar och därmed har svårigheter i att spinna vidare på dessa, alternativt ställa givande följdfrågor (Bliss et. al, 1996)

4.2.4 Lärarens medverkan som medutforskare av matematiken

Som nämnt i resultatdelen av min studie kan man i Gunvors uttalande skönja ett intressant och nytt perspektiv på matematikundervisning. Hon verkar tala om matematiklärandet som om en upptäcktsfärd vilken hon gör tillsammans med sina elever. Matematiska samband och mönster finns i vår vardag och i elevens omgivning och väntar på att bli upptäckta. Hon använder elevernas egna hantverk, sångernas rytm samt ramsor för att uppmärksamma eleven på den matematiken som hon omges av. Gunvors arbetssätt liknar den undervisning som Zoltan Dienes, forskare och en auktoritet inom laborativ matematikundervisning verkar förespråka.

Han i likhet med Gunvor ser matematiken som en spännande värld snarare än något vi själva gör eller skapar. Han säger i ett samtal: ”Are you creating mathematics or are you discovering what is already there? I’d rather fancy you’re discovering.” (Sriraman & Lesh, 2007, s. 69) Denna syn på ämnet verkar återspeglas i Dienes sätt att undervisa med hjälp av laborativt material. Likt Gunvor utformar han sin laborativa undervisning som ”a mixture of mathematics, language and art in the same classroom” (Sriraman & Lesh, 2007, s. 70).

Dienes berättar även hur han genomförde laborativ matematiklektion i en skola belägen i ett socioekonomiskt utsatt brasilianskt område, ett klassrum som helt saknade utrustning. Det enda Dienes använde sig av i sin undervisning blev vid detta tillfälle trasiga möbler som låg i en hög längst bak i klassrummet. Enligt Dienes behöver eleven arbeta med flera olika representationssystem samtidigt, alltså multipla representationer, för att kunna upptäcka matematiska samband och begrepp. Det är även Berit som i sitt arbete verkar närma sig Dienes perspektiv på matematikundervisning. Hon använder sig av inslag i elevens omgivning sådana som till exempel bord eller frukter för att lära ut abstrakta matematiska begrepp (Sriraman & Lesh, 2007).

Samtidigt betonar Dienes att det är samarbete i mindre grupper i motsatsen till tävlingsinriktat lärande som ger bäst effekter vid laborativ undervisning. Han lyfter att lärandet borde organiseras runt en gemensam erfarenhet, en upplevelse som leder till elevernas gemensamma upptäckter (Sriraman & Lesh, 2007, s. 73). Just sådana lärandesammanhang beskriver både Gunvor och Berit när de med sina elever diskuterar matematiska mönster i inredningen och utforskar begreppet ”volym” med hjälp av vatten och köksmått.

4.2.5 Elevens fria tillgång till det laborativa materialet

Alla de intervjuade lärarna säger sig låta eleverna ha fri tillgång till antingen allt eller en del av laborativt material. Berit, Adam och Anna–Carin förvarar också en del av det laborativa materialet i låsta skåp utanför sina klassrum för att ta fram det bara när det passar till lektionsplaneringen. Detta är intressant med hänsyn till Berits uttryckta övertygelse om att allt laborativt material ska vara tillgängligt för eleverna. Kan denna motsättning mellan lärarens ord och materialets upplägg bero på att lärarna i denna skola arbetar i arbetslag och tillsammans planerar verksamheten? I detta sammanhang skulle flera lärares perspektiv på undervisning behöva förenas i det dagliga arbetet med elever.

Forskare Swan & Marshall (2010) påstår i sina studieresultat likt lärarna att det kan vara nyttigt för eleven att ha ständig och fri tillgång till visst laborativt material i matematik. Samtidigt betonar de dock att allt material inte ska hanteras på samma sätt. De konstaterar att det är framför allt sådana föremål som termometrar och digitala klockor som kan fungera i den rollen (Swan & Marshall, 2010).

De intervjuade lärarna ser speciellt tiobasmaterial som lämpligt för elevernas fria användning. Sara och Emma låter sina elever använda det spontant och efter eget omdöme. Hur förhåller sig Emmas arbetssätt till forskarnas slutsatser? Swan & Marshall (2010) anser att tiobasmaterialet (I White, Swan & Marshall, 2013, s. 2 kallad ”Multibase Arithmetic Blocks”) i stället borde cirkulera mellan olika klasser och användas av samma elevgrupp maximalt i tre veckor i streck och minst en gång per år. Detta är menar de det mest effektiva sättet att använda detta laborativa material. De menar att elevernas lärande gynnas av variation och denna typ av cirkulering bland det tillgängliga materialet stimulerar elevens begreppsbildning i matematik. (Swan & Marshall, 2010, s. 4) Under de tre veckor som materialet vistas i klassrummet ska eleverna få använda det fritt och utifrån egna lärandebehov.

I sin översikt av det mest populära laborativa materialet rekommenderar de dock tiobasmaterialet som material lämpligt tidigast för elever i årskurs tre. Swan och Marshall varken förklarar eller argumenterar dock för sin ståndpunkt i frågan. Det är centikuber (också nämnda av Berit) och mönsterblock som de ser som särskilt lämpliga för förskoleklassen och de två första årskurserna av lågstadiet (White, Swan & Marshall, 2013).

Det jag kan observera i Saras och Emmas klassrum är att det erbjudna materialet finns där i tillräckliga mängder för att kunna användas av alla elever alltså enligt den av forskarna rekommenderade principen: ”a lot of a little” (Swan & Marshall, 2010, s. 4).

Lärarna i Perry & Howards studie (Perry & Howard, 2010) tenderade att starta upp sitt laborativa arbete med det som benämns ”teacher-directed” arbetssätt och sedan har fortsatt med mer elevcentrerat ”self-discovering” alltså mer självständigt och utforskande arbetssätt (Swan & Marshal, 2010, s. 18). Det är även mina intervjupersoner som beskriver liknande ordningsföljd i sekvensering av sin laborativa undervisning. Lärarens introduktion av arbetssättet i helklass eller mindre grupp följs åt av elevens egna utforskande av materialet. Det som verkar skilja lärarna åt är dock den grad i vilken de låter elevernas utforskande (”self-discovery”) vara självständigt och oberoende från lärarens vägledning (Swan & Marshal, 2010, s. 18).

Berit, Adam och Sara verkar följa upp elevens lärande och medverka via till exempel stödfrågor eller anpassning av följduppgifter utifrån den enskilda elevens kunskaper och förmåga. Emma betonar å sin sida väldigt tydligt vikten av att eleven arbetar självständigt och själv lär sig att ta ansvar för sitt lärande. Enligt Emmas ord får hennes elever välja vilken sorts

material och vid vilka uppgifter de vill använda det. Detta arbetssätt strider delvis med forskning som säger att det är gynnsamt att låta hela aktiviteten fokusera på samma laborativa material som matematisk representation. Enligt Swan och Marshal (2010) blir då detta material en gemensam språngbräda till elevernas kommunikation och tankeutbyte. Man kan även fundera om den enskilda eleven har förmågan att fatta beslut gällande materialvalet som kan leda till effektivt lärande just i hennes fall. Eller borde liknande beslut fattas med den ansvariga lärarens stöd? Stor del av forskning som redan har diskuterats i denna studie tyder på att det är läraren som ska planera, utforma laborativa aktiviteter och aktivt medverka i dessa för att de bästa resultaten för elevens lärande ska kunna uppnås.

Samtidigt finns det forskning som till viss del skulle stödja Emmas tillvägagångssätt i detta sammanhang. Både Moch och Dienes lyfter att elevens spontana och mer självständiga användning och utforskande av det laborativa materialet också kan ha sin viktiga roll i matematiklärandet. Både Dienes och Moch menar att alldeles för hård styrning som förutsätter att eleven noga följer lärarens instruktioner kan bli negativ både för elevens motivation, nyfikenhet och lärande (Moch, 2008; Sriraman & Lesh, 2007).
Dienes lyfter i samtalet att det även kan bli på sikt fördelaktigt för elevens matematiska förståelse att introducera eleven till nytt laborativt material genom självständig lek och utforskande (Sriraman & Lesh, 2007, s. 68). Detta förutsätter dock att materialet har en inre logisk struktur som i sig kan vägleda eleven till de matematiska begrepp och mönster som ska förmedlas av det. Själva interaktionen med materialet kan alltså enligt forskaren leda eleven till vissa matematiska principer dolda i materialet.

Analysen av den forskning som diskuterar rollen i elevens självständighet respektive lärarens engagerade medverkan tyder alltså på att detta är en komplex fråga som kräver eftertanke och djup insikt från den ansvariga lärarens sida.

5 SLUTSATSER

De intervjuade lärarna verkar se på det laborativa arbetssättet som ett viktigt verktyg i matematikundervisning för alla elever oavsett elevernas bakgrund och andra förutsättningar. Denna undervisningsmetod beskrivs som en oumbärlig länk i varje elevs lärande. Lärarna erkänner dock att dess närvaro blir på ett särskilt sätt betydelsefull i matematiklärandet hos vissa elever. Det kan vara de elever som har inlärningssvårigheter eller av olika skäl är hindrade i sin kommunikation med sin omgivning.

Lärarnas syn på det laborativa arbetet som ett gemensamt och universellt arbetssätt bidrar även till att den lärande gemenskapen kan skapas. Det laborativa materialet blir inte enbart något som förknippas med ”vissa”, till exempel ”svagare” elever utan det blir till ett självklart och frekvent använt verktyg som alla elever möter i sin skolvardag.

Det laborativa arbetet uppfattas av flera lärare som ett lustfyllt och motiverande inslag i matematikundervisning, samtidigt som det ska fördjupa elevens begreppsförståelse och relationella förståelse. Det är på det sättet även en väg till en mer varierad matematikundervisning. Det är även själva laborativa arbetssättet och det erbjudna laborativa materialet som kan varieras. Denna tanke blir dock ifrågasatt utifrån en del forskning vilket diskuteras bredare i diskussionsdelen av arbetet (Uttal et. al, 1997, s. 51).

Slutligen kan man nämna att flera av de intervjuade verkar ägna sin undervisning och sitt tillvägagångssätt i klassrummet mycket analys och reflektion. Genom att analysera det som

försiggår i klassrummet och i kommunikationen mellan dem och eleverna verkar de utvärdera och försöka utveckla sin laborativa undervisning. I detta sammanhang tas upp både de situationer som upplevs som lyckade och de undervisningssammanhang som lärarna har upplevt som utmanande och som därmed bär potential till utveckling av undervisningen. Det som inte tas upp av lärarna är dock arbetet med elevens egna reflektion över det som sker vid det laborativa arbetet samt över hennes egna matematiklärande. Skapar lärarnas undervisning sådana tillfällen till elevens personliga reflektion? Detta skulle kunna bli en intressant fråga att undersöka vidare.

Vilka dominerande inslag finner vi i lärarnas uttalanden om deras faktiska arbetssätt i klassrummet? Alla verkar överens om att de försöker vara närvarande i det laborativa arbetet genom introduktion av det laborativa materialet där den fysiska utformningen av materialet tydligt kopplas till de matematiska begreppen. Detta tillvägagångssätt kallas för ”connecting” och anses av forskare vara essentiellt för elevens lyckade laborativa matematiklärande (Laski et. al, 2015, s. 6). De flesta lärarna lyfter även att de försöker vara närvarande och föra dialog med eleven under hela lärandeprocessen, även vid de mer självständiga momenten av det laborativa arbetet. Detta verkar de göra bland annat genom frågor som ska driva elevens lärande framåt och genom att ta på sig rollen som medutforskare av matematikens värld.

Lärarna verkar använda det laborativa arbetssättet som ett ständigt närvarande undervisningsverktyg och ett långsiktigt projekt. Det är det långsiktiga arbetet som enligt dem kan ge goda effekter i elevens lärande och matematiska förståelse och även hjälpa läraren att planera elevens tänkta progression över tid. Detta förhållningssätt till det laborativa arbetet bekräftas även av forskning (Laski et. al, 2015).

Slutligen är det alla lärare som även ger sina elever fri tillgång till laborativt material. En av lärarna uttrycker även att hennes elever får använda sig av det laborativa materialet på egen hand. I detta arbete refereras det dock till forskning som avråder detta tillvägagångssätt. Valet av materialet och det sätt på vilket det ska användas får aldrig överlämnas helt till eleven (Loewenberg Ball, 1992).

6 REFERENSER

Bliss, J., Askew, M. & Macrae, S. (1996). Effective Teaching and Learning: Scaffolding Revisited, *Oxford Review of Education*, 22(1), 37- 61, doi: 03054985.

Boggan, M, Harper, S. & Whitmire, A. (2010). Using Manipulatives to Teach Elementary Mathematics. *Journal of Instructional Pedagogies* Hämtad 2018-01-15 från https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1096945.pdf

Broadbent, A. (2004). Understanding Place-Value: A Case Study of the Base Ten Game. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 9(4) 45-46, doi: 234656740.

Bruner, J. (1973). *Going Beyond the Information Given*. New York: Norton.

Bryman, A. (2013). *Samhällsvetenskapliga metoder*. Malmö: Liber.

Caswell, R. (2007). Fractions from concrete to abstract using Playdough Mathematics. *Australian Primary Mathematics Classroom*.12(2), 14-17.

Daniels, H., Hyde, A. & Zemelman, S. (1993). *Best practice. Bringing Standards to life in Americas Clasrooms.* New Hampshire: Heinemann.

D´Angelo, F., Illiev, N. (2012). Teaching mathematics to young children through the use of concrete and virtual manipulatives. Tillgänglig: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED534228.pdf

Elbow, P. (1986). *Embracing Contraries: Explorations in Learning and Teaching*, New York: Oxford University Press.

Engvall, M. (2013). *Handlingar i matematikklassrummet. En studie av undervisningsverksamheter på lågstadiet då räknemetoder för addition och subtraktion är i fokus* (doktorsavhandling, Linköping Studies in Behavioural Science, 178). Linköping: Institutionen för beteendevetenskap och lärande, Tillgänglig: https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:660675/FULLTEXT01.pdf

Heddens, J. W. (1986). Bridging the gap between the Concrete and the Abstract. *Arithmetic Teacher*, 33 (6), 14-17.

Heiberg Solem, I., Alseth, B. & Nordberg, G. (2011). *Tal och tanke- matematikundervisning från förskoleklass till årskurs 3*, Lund: Studentlitteratur.

Howard, P & Perry, B. (1997). Manipulatives in Primary Mathematics: Implications for Learning and Teaching. *Australian Primary Mathematics Classroom,* 2(2), 25-30*,* doi: 10.1111/j.1949-8594.2008.tb17844.x

Hunt, A. W., Nipper, K. L. & Nash, L. E., (2011). Virtual vs. Concrete Manipulatives in Mathematics Teacher Education: Is One Type More Effective Than the Other? *Current Issues in Middle Level Education,* 16(2), 1-6. Tillgänglig: https://pdfs.semanticscholar.org/239e/472889cc366dfac48704dada793711cb621a.*pdf*

Kagan, S. & Stenlev, J. (2016). *Cooperative learning strukturer*. Stockholm: Alinea.

Kosko, K. W. & Wilkins, J. L., (2010). Mathematical Communication and Its Relation to the Frequency of Manipulative Use. *Mathematics Education,* 5 (2), 79-90 doi: iejme.2010.006

Larkin, K. (2016). Mathematics Education and Manipulatives: Which, when and how? *Australian Primary Mathematics Classroom,* 21 (1), 12- 17.

Laski, E. V., Jordan, J. R. & Daoust, C. (2015). What Makes Mathematics Manipulatives Effective? Lessons From Cognitive Science and Montessori Education. *KU Scholar Works*, Tillgänglig: https://kuscholarworks.ku.edu/handle/1808/20642

Loewenberg Ball, D., (1992). Magical Hopes: Manipulatives and the Reform of Math Education, *Research Gate*, 16(2), 14-47, Hämtad från: https://www.aft.org/sites/default/files/periodicals/ae_summer1992_ball.pdf

Löwing, M. (2004). *Matematikundervisingens konkreta gestaltning. En studie av kommunikationen lärare - elev och matematiklektionens didaktiska ramar* (avhandling, Göteborg Studies in Educational Sciences, 208). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Malmer, G. (2002). *Bra matematik för alla*. Studentlitteratur: Stockholm.

McIntosh, A. (2015). *Förstå och använda tal- en handbok*. Nationellt Centrum för Matematikutbildning: Göteborg.

McNeil, N. M. & Uttal, D. H. (2009). Rethinking the Use of Concrete Materials in Learning: Perspectives From Development and Education. *Child Development Perspectives*, 3 (2), 137-139. Doi: org/10.1111/j.1750-8606.2009.00093.

McNeil, N. M., Uttal, D. H., Jarvin, L. & Sternberg, R. J. (2009). Should you show me the money? Concrete objects both hurt and help performance on mathematics problems. *Learning and Instruction*, 2 (19). 171-184. doi: 10.1016/j.learninstruc.2008.03.005.

Moch, P. L. (2008). Manipulatives Work! *Research in Practice*, 66 (1). 81-87. doi: 10.1080/00131720108984802. Tillgänglig: https://www.researchgate.net/publication/233436695_Manipulatives_Work

Moyer, P. S. (2001). Are We Having Fun Yet? How Teachers Use Manipulatives to Teach Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 47 (2). 175-197. doi: 10.1023/A:1014596316942. Tillgänglig: https://pdfs.semanticscholar.org/18bd/e7034275be023eb95a1ffb336705950a133d.pdf

Mudaly, V. & Naidoo, J. The Concrete Representational Abstract Sequence of Instruction in Mathematics Classrooms, *Perspectives in Education,* 33 (1), 42-56 doi: 10.1037/spq0000039.

Norén, E. (2010). *Flerspråkiga matematikklassrum: Diskurser i grundskolans matematikundervisning*. Doktorsavhandling. Stockholm: Stockholms universitet.

Perry, B. & Howard, P. (1997). Mathematics and manipulatives: Comparing primary and secondary mathematics teachers' views. *Australian Educational Researcher*. Hämtad från: https://www.aare.edu.au/data/publications/1997/howap045.pdf

Pietersen, C. (2006). Evaluation of a number skills development programme. *South African Journal of Education*, 26 (3). 413–426. Tillgänglig: https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1150400.pdf

Raphael, D. & Wahlström, M. (1989). The Influence of Instructional Aids on Mathematics Achievement. *Journal for Research in Mathematics Education,* 20 (2), 173-190, doi: 10.2307/749281.

Rystedt, E. & Trygg, L. (2010). *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?* Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning.

Satsangi, R., Bouck, E. C., Taber-Doughty, T., Bofferding, L. & Roberts, C. A. (2016). Comparing the Effectiveness of Virtual and Concrete Manipulatives to Teach Algebra to Secondary Students With Learning Disabilities. *Learning Disability Quarterly* 39 (4), 240-253, doi: 10.1177/0731948716649754

Sherman, H. J., Richardson, L. I. & Yard, G. J. (2014). *Teaching Learners who Struggle with Mathematics: Systematic Intervention and Remediation*, Pearson: Missouri.

Skolinspektionen. (2009). *Kvalitetsgranskning Rapport 2009:5 Undervisningen i matematik – utbildningens innehåll och ändamålsenlighet.* Stockholm: Skolinspektionen. Tillgänglig: https://www.skolinspektionen.se/globalassets/publikationssok/granskningsrapporter/kvalitetsgranskningar/2009/matematik/granskningsrapport-matematik.pdf

Skolverket, (2011a). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011 (Reviderad 2016)*. Stockholm: Skolverket. Tillgänglig: https://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/grundskoleutbildning/grundskola/laroplan

Skolverket, (2011b). *Laborativ matematik, konkretiserande undervisning och matematikverkstäder. En utvärdering av Matematiksatsningen*. Stockholm: Skolverket. Tillgänglig: https://www.skolverket.se/om-skolverket/publikationer/visa-enskild-publikation?_xurl_=http%3A%2F%2Fwww5.skolverket.se%2Fwtpub%2Fws%2Fskolbok%2Fwpubext%2Ftrycksak%2FBlob%2Fpdf2724.pdf%3Fk%3D2724

Sowell, E. J. (1989). Effects of Manipulative Materials in Mathematics Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education,* 20 (5) . 498-505. doi: 10.2307/749423

Sriraman, B. & Lesh, R. (2007). Leaders in mathematical thinking and learning. A Conversation With Zoltan P. Dienes. *Mathematical Thinking and Learning*, 9 (1), 59- 75. doi: 10.1207/s15327833mtl0901_5

Stein, M. K. & Bovalino, J. W. (2001). Manipulatives: One Piece of the Puzzle. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 6 (6), 356-59. doi: EJ668835.

Swan, P. & Marshall, L. (2010). Revisiting Mathematics Manipulative Materials. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 15 (2), 13-19.

Thompson, P. W. (1992). Notations, conventions, and constraints: Contributions to effective uses of concrete materials in elementary mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education,* 23 (2), 123-147.

Timmerman M. A. (2014). Making Connections: Elementary Teachers' Construction of Division Word Problems and Representations. *School Science and Mathematics,* 114 (3), 114-124. doi: 10.1111/ssm.12059

Trygg, L. (2014). Undervisning med laborativa material. *Matematikundervisning i praktiken.* 176-183. Tillgänglig: https://www.gu.se/omuniversitetet/personal/?userId=xtryle

Uttal, D. H., Scudder, K. V. & DeLoache, J. S., (1997). Manipulatives as Symbols: A New Perspective on the Use of Concrete Objects to Teach Mathematics. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 18(1), 37- 54 doi: 10.1016/S0193-3973(97)90013-7.

Vetenskapsrådet (2011). *God forskningssed*. Stockholm: Vetenskapsrådet. Tillgänglig: https://publikationer.vr.se/produkt/god-forskningssed/

Vygotskij, L. S. (2001). *Tänkande och språk*. Göteborg: Daidalos.

Wearne, D. & Hiebert, J. (1988). *Constructing and using meaning for mathematical symbols: The case of decimal fractions. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.),*. Number concepts and operations in the middle grades. (220-235) Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

White, G., Swan, P. & Marshall, L. (2013). *Hands on Heads on: The effective use of mathematics manipulative materials, A Mathematics Manipulatives Continuum.* Joondalup: Edith Cowan University. Tillgänglig: https://maths-no-fear.wikispaces.com/file/view/Hands%20on%20heads%20on.pdf/85641895/Hands%20on%20heads%20on.pdf

Winograd, T. & Flores, F. (1986). *Understanding Computers and Cognition: A New Foundation for Design*. Stanford: Addison-Wesley Professional.

Yook, E. & Loong, K. (2014). Fostering mathematical understanding through physical and virtual manipulatives. *Australian Mathematics Teacher,* 70 (4), 3-10 doi: 0045-0685

7 BILAGA 1

Intervjufrågor (exempel på frågor jag utgick ifrån i mina intervjuer):

1. Hur länge har du varit verksam som lågstadielärare?
2. Vad tycker du om laborativt arbetssätt
3. Vilka laborativa material jobbar du med?
4. Hur gör du när du använder laborativt material i matematikundervisning? Exempel på lektioner?
5. Har du exempel på något som kan vara svårt i detta arbetssätt (laborativa arbetssättet), som du kanske själv har varit med om? Exempel?
6. Varför ska man använda laborativt material?
7. Ska man variera laborativt material eller inte? Varför?
8. Vad är ditt syfte med användning av laborativt material i matematik?